RECHERCHES

SUR PLUSIEURS OUVRAGES

DE LÉONARD DE PISE

ET

SUR DIVERSES QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE

PAR M. ÉDOUARD LUCAS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE CHARLEMAGNE À PARIS

EXTRAIT DU *BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE*
TOMO X. — MARZO, APRILE E MAGGIO 1877.

ROME
IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
Via Lata, Num° 3.
1877

RECHERCHES

SUR PLUSIEURS OUVRAGES

DE LÉONARD DE PISE

ET

SUR DIVERSES QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE

PAR M. EDOUARD LUCAS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE CHARLEMAGNE A PARIS

EXTRAIT DU *BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA*

DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

TOMO X. — MARZO, APRILE E MAGGIO 1877.

ROME

IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES

Via Lata, Num.° 3.

1877

RECHERCHES SUR PLUSIEURS OUVRAGES

DE LÉONARD DE PISE

ET

SUR DIVERSES QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE

CHAPITRE 1.

SUR LES SERIES RECURRENTES.

Le LIBER ABBACI de Léonard de Pise contient un certain nombre de questions intéressantes qui se rapportent à l'analyse indéterminée du premier degré, et dont la solution semble indiquer que cette analyse était connue bien longtemps avant Claude Gaspard Bachet de Méziriac, qui la donna en 1624[1], et passe encore aujourd'hui pour l'inventeur de cette théorie[2].

---

[1] PROBLEMES PLAISANS ET DELECTABLES, QUI SE FONT PAR LES NOMBRES. *Partie recueillis de diuers Autheurs, partie inuentez de nouueau auec leur demonstration*. Par CLAVDE GASPARD BACHET, Sieur de Meziriac. *Seconde Edition, reueuë, corrigée, & augmentée de plusieurs propositions, & de plusieurs Problemes, par le mesme Autheur.* Tres-vtiIe pour toutes sortes de personnes curieuses, qui se seruent de l'Arithmetique, & Mathematique. *A LYON.* Chez PIERRE RIGAVD & ASSOCIEZ. ruë Merciere, au coing de ruë Ferrandiere, à I'Enseigne de la Fortune. *M.DC.XXIIII*, page 18, lig. 24-28, pages 19-32, page 33,lig.1-2, PROPOSITION XVIII. — PROBLEMES PLAISANTS & DELECTABLES QUI SE FONT PAR LES NOMBRES, PAR CLAUDE GASPARD BACHET, SIEUR DE MEZIRIAC, TROISIEME EDITION, *REVUE, SIMPLIFIEE ET AUGMENTEE* PAR A. LABOSNE, *Professeur de Mathématiques*, PARIS, GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55, 1874, (Tous droits réservés), pages 227-233.

[2] Lagrange après avoir exposé la résolution de l'équation $an - by = c$ en nombres entiers, ajoute (ELEMENTS D'ALGEBRE PAR M. LEONARD EULER, TRADUITS DE L'ALLEMAND, *AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS*, TOME SECOND. *DE L'ANALYSE INDETERMINEE*. A LYON, chez JEAN MARIE BRUISSET, Pere & Fils. M.DCC.LXXIV. *Avec Approbation & Privilege du Roi*, page 524, lig. 1-20. ADDITIONS, PARAGRAPHE III, N° 45. — ELEMENTS D'ALGEBRE PAR LEONARD EULER, TRADUITS DE L'ALLEMAND, AVEC NOTES ET ADDITIONS, *DE L'ANALYSE INDETERMINEE.* A LYON, Chez BRUISSET ainé & Compagnie. L'an III[e]. de L'ERE Républicaine, page 525, lig. 2-20. — ELEMENTS D'ALGEBRE PAR LEONARD EULER, TRADUITS DE L'ALLEMAND, AVEC NOTES ET ADDITIONS. *Nouvelle Édition revue & corrigée.* TOME SECOND. *DE L'ANALYSE INDETERMINEE*. A PETERSBOURG ; *Et se trouve* A PARIS. M.DCC.XCVIII, page 525, lig. 12-24, page 526, lig. l-6. — ELEMENTS D'ALGEBRE PAR LEONARD EULER, TRADUITS DE L'ALLEMAND, AVEC NOTES ET ADDITIONS. NOUVELLE EDITION REVUE ET CORRIGEE. TOME SECOND. ANALYSE INDETERMINEE. A PARIS, ecc. SEPTEMBRE 1807, page 181, lig. 15-27) :

> « 45. On doit la première solution de ce problème à M. *Bachet de Meziriac*, qui l'a donnée dans la seconde édition de ses Recréations mathématiques, intitulées *Problèmes plaisans & délectables, &c*. La première édition de cet Ouvrage a paru en 1612, mais la solution dont il s'agit, n'y est qu'annoncée, & ce n'est que dans l'édition de 1624 qu'on la trouve complette. La méthode de M. *Bachet* est très-directe & très-ingénieuse, & ne laisse rien à désirer du côté de l'élégance & de la généralité.
>
> Nous saisissons avec plaisir cette occasion de rendre à ce savant Auteur la justice qui lui est due sur ce sujet, parce que nous avons remarqué que les Géomètres qui ont traité le même problème après lui, n'ont jamais fait aucune mention de son travail ».

Lagrange expose ensuite cette méthode (*ELEMENTS D'ALGEBRE*, *PAR LEONARD EULER*, etc. TOME SECOND, etc. A LYON, etc., MDCCLXXIV, etc., page 524, lig. 21-23, pages 525-526. — ELEMENTS D'ALGEBRE, etc. A LYON, etc. L'an III, etc., page 525, lig. 21-23, pages 526-527. — ELEMENTS D'ALGEBRE, etc. TOME SECOND, etc. A PETERSBOURG, etc. M.DCC.XCVIII, page 526, lig. 7-23, page 527. — ELEMENTS D'ALGEBRE, etc. TOME SECOND, etc. A PARIS, etc.. SEPTEMBRE 1807, page 381, lig.

La question « *De homine, qui emit* 100 *staria frumenti* » et les deux suivantes du *« Liber Abbaci »* de Léonard de Pise[1], la question ayant pour titre : « *De auibus emendis secundum proportionem datam* », et les deux suivantes, que l'on trouve dans un opuscule du même auteur[2], se rapportent entièrement à l'analyse indéterminée du premier degré, et conduisent à des équations indéterminées du premier degré à deux, trois, quatre et cinq inconnues.

Les commentaires des divers auteurs hindous qui accompagnent le texte des ouvrages de Brahmegupta et de Bhascara Acharya, le premier du VI^{e} siècle et le second du XII^{e}, attribuent en effet à un auteur plus ancien que Brahmegupta, et qu'ils nomment Aryabhatta, la résolution de l'équation indéterminée du premier degré deux inconnues, en nombres entiers[3].

28-29, page 382. — Dans le texte latin des *Disquisitiones Arithmeticæ* de Gauss on lit (DISQVISITIONES ARITHMETICÆ, AVCTORE D. CAROLO FRIDERICO GAVSS, LIPSIÆ, IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER. JUN. 1801, page 666, lig. 2-14, ADDITAMENTA. — CARL FRIEDRICH GAUSS VERKE, ERSTER BAND, HERAUSGEGEBEN VON DER KÜNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN, 1863, page 465, lig. 2-9) :

> « *Ad art.* 28. Solutio æquationis indeterminatæ *ay* = by ± 1 non primo ab ill. Eulero (vt illic dicitur) sed iam a geometra 17^{mi} sæculi Bachet de Meziriac, celebri Diophanti editore et commentatore, perfecta est, cui ill. La Grange hune honorem vindicauit (Add. à l'Algèbre d'Euler p. 525, vbi simul methodi indoles indicata est). Bachet inuentum suum in editione secunda libri *Problêmes plaisans et delectables qui se font par les nombres*, 1624, tradidit ; in editione prima (à Lyon l612), quam solam mihi videre licuit, nondum exstat, verumtamen iam annunciatur ».

Poullet-Delisle traduit ce passage ainsi (RECHERCHES ARITHMETIQUES, par M. CH.-FR. GAUSS (de Brunswick) ; Traduites par A.-C. M. POULLET-DELISLE, Professeur de Mathématiques au Lycée d'Orléans. A PARIS, chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, no 57. 1807, page 490, lig. 2-13) :

> « N° 28. La solution de l'équation indéterminée $ax + by = \pm 1$ n'a pas été trouvée pour la première fois par *Euler*, comme nous l'avons dit, mais par *Bachet de Meziriac*, géomètre du dix septième siècle, célèbre par l'édition de *Diophante* qu'il a publiée avec des Commentaires. C'est *Lagrange* qui lui en a restitué l'honneur, dans ses *Additions à l'Algèbre d'Euler*, p. 525, où il indique en même temps le fond de la méthode. *Bachet* a publié sa découverte dans la seconde édition de son ouvrage intitulé : *Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres*, 1624 ; elle n'existe pas dans la première édition (imprimée à Lyon en 1712 *(sic)*) qui est la seule que j'aie vue, mais elle y est annoncée ».

[1] SCRITTI DI LEONARDO DI PISANO, etc. VOLUME 1. (LEONARDI PISANI, LIBER ABBACI). ROMA, etc. MDCCCLVII, page 281, lig. 28-43, page 282, lig. 1-18.

[2] TRE SCRITTI INEDITTI DI LEONARDO PISANO, etc. FIRENZE, TIPOGRAFIA GALILEIANA, di M. Cellini e C. , 1854, page 44, lig. 17-25, pages 45-48, page 49, lig. 1-10. — OPUSCOLI DI LEONARDO PISANO, etc. *SECONDA EDITIONE*, FIRENZE, TIPOGRAFIA GALILEIANA, di M. Cellini e C. , 1856, page 44, lig. 17-25, pages 46-48, page 49, lig. 1-10. — SCRITTI DI LEONARDO PISANO, etc, VOLUME II. (LEONARDI PISANI PRACTICA GEOMETRIÆ ED OPUSCOLI), ROMA, etc. , 1862, page 247, lig. 19-43, page 248, page 240, lig. 1-25. — ANNALI DI SCIENZE MATHEMATICHE E FISICHE, COMPILATI DA BARNABA TORTOLINI, ecc. *TOMO SESTO*, ROMA, etc. 1855, page 218, lig. 6-28, pages 219-224, page 225, lig. 1-26, 28-33, Giugno 1855. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITTI DI LEONARDO PISANO, etc. *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI, ROMA, Tipografia delle Belle Arti, 1855, pages 28-33, page 34, lig. 1-26, 28-33.

[3] ALGEBRA WITH ARITHMETIC AND MENSURATION, FROM THE SANSCRT OF *BRAHMEGUPTA AND BHASCARA.* TRANSLATED BY HENRY THOMAS COLEBROOKE, etc. LONDON, JOHN MURRAY, ALBEMARLE STEET. 1817, page VII, lig. 22-30, 36, note 4. — MISCELLANEOUS ESSAYS, BY H. T. COLMEBROOKE. IN TWO VOLUMES. VOL II. LONDON : WM. H. ALLEN AND CO., LEADENHALL STREET. 1837, page 426, lin. 3-13, 31. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHEMATIQUES EN ITALIE DEPUIS LA RENAISSANCE DES LETTRES

Mais, nous signalerons plus particulièrement dans ce travail, une question fort curieuse du LIBER ABBACI, qui renferme le premier exemple des séries récurrentes. On trouve en effet, à l'endroit cité ci-dessus, le passage suivant qui n'avait point été remarqué[1] :

parium	1
primus	2
Secundus	3
tercius	5
Quartus	8
Quintus	13
Sestus	21
Septimus	34
Octauus	55
Nonus	89
Decimus	144
Undecimus	233
Duodecimus	377

« Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Qvidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno : cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare ; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat ; et sic sunt in secundo mense paria 3 ; ex quibus in uno mense duo pregnantur ; et, gemitiantur in tercio mense paria 2 coniculorum ; et sic sunt paria 5 in ipso mense ; ex quibus in ipso pregnantur paria 3 ; et sunt in quarto mense paria 8 ; ex quibus paria 5 geminant alia paria 5 : quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense ; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense ; sed alia 8 paria pregnantur ; et sic sunt in sexto mense paria 21 ; cum quibus additis parijs 13, que geminantur in septimo, erunt in ipso paria 34 ; cum quibus additis parijs 21, que geminantur in octauo mense, erunt in ipso paria 55 ; cum quibus additis parijs 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89 ; cum quibus additis rursum parijs 55, que geminantur in decimo, erunt in ipso paria 144 ; cum quibus additis rursum parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233. Cum quibus etiam additis parijs 144, que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377 ; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni. Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2 ; et secundum cum tercio ; et tercium cum quarto ; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, uidelicet 377 ; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus ».

On retrouve cette série, quatre siècles plus tard, dans la dernière des annotations d'ALBERT GIRARD (mort en 1633[2]), sur la traduction

---

JUSQU'A LA FIN DU XVII^{e} SCIECLE, PAR GUILLAUME LIBRI. TOME PREMIER. PARIS, LIBRAIRIE DE PAULIN, RUE DE SEINE, N° 33. 1835, page 134, lig. 8-14, 18-26, page 135, lig. 1-3, 17-20. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHEMATIQUES EN ITALIE DEPUIS LA RENAISSANCE DES LETTRES JUSQU'A LA FIN DU XVII^{e} SCIECLE, PAR GUILLAUME LIBRI. TOME PREMIER. PARIS, CHEZ JULES RENOUARD ET C^{ie} LIBRAIRES, RUE DE TOURNON, N° 6, 1838, page 127, lig. 11-15, page 128, lig. 1-2, 16-21. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHEMATIQUES EN ITALIE, etc, PAR GUILLAUME LIBRI. TOME PREMIER. DEUXIEME EDITION. HALLE ^{s}/S., H. W. SCHMIDT.1865, page 127, lig. 11-15, page 128, lig. 1-2, 16-21. — STORIA DELI SCIENZE MATEMATICHE IN ITALIA DI GUILIELMO LIBRI, VERSIONE DI LUIGI MASIERI, DOCORE IN FISICA E MATEMETICA, TOMO PRIMO, Milano, TIPOGRAFIA E LIBRERIA PIROTTA E C. Contrada di Santa Radegonda, N. 964. 1842, page 107, lig. 10-15, 29-33. — APERÇU HISTORIQUE SUR L'ORIGINE ET LE DEVELOPPEMENT DES METHODES EN GEOMETRIE, etc. , PAR M. CHASLES, etc. , BRUXELLES, M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADEMIE ROYALE, 1837, page 418, lig. 20-35. — APERÇU HISTORIQUE SUR L'ORIGINE ET LE DEVELOPPEMENT DES METHODES EN GEOMETRIE, etc. PAR M. CHASLES, etc. , SECONDE EDITION, CONFORME A LA PREMIERE. PARIS, GAUTHIER-VILLARS, etc. 1875, page 418, lig. 20-35.

[1] SCRITTI DI LEONARDO PISANO, MATEMATICO DEL SECOLO DECIMOTERZO, ecc. VOLUME 1, etc., page 283, lig. 32-43, page 284, lig. 1-13.

[2] Mathematisches Wörterbuch, ecc. von Georg Simon Klügel, ecc. Erste Abtheilung Die reine Mathematik. Erster Theil, von A bis D, ecc. Leipzig, etc. 1803, page 52, lig. 1-4. — BIOGRAPHISCH -

française qu'il fit lui même du cinquième et du sixième livre de l'Arithmétique de DIOPHANTE[1] On lit, en effet, dans cette annotation[1] :

LITERARISCHES HANDWÖRTERBUCH ZUR GESCHICHTE DER EXACTEN WISSENSCHAFTEN, etc. GESAMMELT, VON J. C. POGRENDORFF, etc. ERSTER BAND. A–L. LEIPZIG, 1863, col. 902, lig. 50-53. — BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, PUBBLICATO DA B. BONCOMPAGNI, etc. TOMO III. ROMA, etc. 1870, page 360, lig. 12, e nota (2), OTTOBRE 1870. — BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, etc. TOMO VII. ROMA, etc. 1874, page 559, lig, 1-10 ; page 560, lig. 1-10. — Une lettre dédicatoire de la veuve et des enfants d'Albert Girard aux Etats Généraux des Pays-bas se trouve dans les pages cinquième (signée *3), sixième, et septième de l'édition intitulée « LES OEUVRES Mathematiques DE SIMON STEVIN de Bruges. Où sont inserées les MEMOIRES MATHEMATIQVES, Esquelles s'est exercé le Tres-haut & Tres-illustre Prince MAURICE DE NASSAU, prince d'Aurenge, Gouverneur des Provinces des Païs-bas unis, General par Mer & par Terre, &c. ». *Le tout reveu, corrigé, & augmenté* par ALBERT GIRARD Samielois, Mathematicien. A LEYDE, chez Bonaventure & Abraham Elsevier, Imprimeurs ordinaires de l'Université, ANNO MDCXXXIV ». Dans cette lettre intitulée (LES OEUVRES Mathematiques de SIMON STEVIN de Bruges, etc., page cinquième, lig. 1-10) : *« A Tres-hauts & Très-puissants Seigneurs,* Messeigneurs les ESTATS GENERAUX DE PAÏS BAS UNIS, ET *A Tres-hauts & Très-illustre Prince* Monseigneur le PRINCE D'AURENGE Gouverneur des dites Provinces, General par Mer & par Terre, &c. » et signée (LES OEUVRES Mathematiques DE SIMON STEVIN de Bruges, etc. , page septiéme, lig. 8-14) : « MESSEIGNEVRS, *De vos Tres-illustres Seigneuries, & de vostre* Excellence, Les Tres-humbles & Tres obeissans subjets serviteurs & servantes, la vefve & les enfans orphellins de feu ALBERT GIRARD », on lit (LES OEUVRES Mathematiques de SIMON STEVIN de Bruges, etc. page 5ème, signée * 3, lig. 12-20) :

> « Messeignevrs
>
> Voici une pauvre vefve avec onze enfans orphelins, ausquels le mari & pere, decedé il y a un an n'a laissé qu'une bonne réputation d'avoir fidelement servi, & employé tout son temps a la recerche (sic) des plus beaux secrets de Mathematiques ; ayant esté ravi lors qu'il projettoit d'en laisser quelques monuments utiles a la postérité, & de sa propre invention ; lesquels il eust luy mesme apporté aux pieds de vos Seigneuries Tres-illustres, si Dieu luy eust donné le loisir de les parachever ».

La veuve et les enfants d'Albert Girard disant dans ce passage de leur lettre ci-dessus mentionnée que ce géométre était « decedé il y a un an », font connaître qu'il est mort en 1633, l'édition intitulée « LES OEUVRES Mathematiques DE SIMON STEVIN », etc, qui contient cette lettre ayant dans son frontispice la date « MDCXXXIV » (voyez la ligne 17 de cette page 6), c'est-à-dire « 1634 ». Dans le quatrième volume de cette édition se trouve une note d'Albert Girard, dans laquelle on lit (LES OEUVRES Mathematiques DE SIMON STEVIN de Bruges, etc. QUATRIESME VOLUME, Traitant de L'ART PONDERAIRE OU DE LA STATIQVE, page 482, col. 2a, lig. 12-18) :

> « *On pourra voir comment, en quella forme, & de quel nombre on pourra à faire les dents des vigoureux rouages en mes Mechaniques ; car il y a une raison, une considération, & une invention non vulgaire sur ce subject, mais estant icy en pays estrange, sans Moecenas, & non sans pertes, avec une grande famille je n'ay pas le loisir, ny le pouvoir, d'escrire icy tout ce qui y pourroit estre convenable* ».

Ce passage de la note citée ci-dessus d'Albert Girard démontre comme l'a fait pareillement remarquer M. Vorstermann Van Oijen (BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA, etc. TOMO III. ROMA, etc. 1870, page 360, lig. 11-12, DECEMBRE 1870. — QUELQVES ARPENTEURS HOLLANDAIS DE LA FIN DU XVIme ET DU COMMENCEMENT DU XVIIme SIECLE ET LEURS INSTRUMENTS. PAR C. A. VORSTERMAN VAN OIJEN, etc. ROME, etc. 1870, page 38, lig. 11-12) qu'Albert Girard n'appartenait pas aux Pays-Bas.

[1] « SIXIEME LIVRE D'ALGEBRE DE DIOPHANTE D'ALEXANDRIE ; *Traduict en langue Françoise* & *expliqué par* ALBERT GIRARD, *Samielois* » (L'ARITHMETIQVE DE SIMON STEVIN DE BRVGES, Reueuë, corrigee & augmentée de plusieurs traictez et annotations par ALBERT GIRARD Samielois Mathematicien. A LEIDE, de l'Imprimerie des ELZEVIERS. MDCXXV pages 650-677. — LES OEUVRES Mathématiques DE SIMON STEVIN de Bruges, etc. , page 163 col. 3-4, pages 164-169, page 170, col. 1-2). — Le Baron Jean Plana dit (MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, SERIE SECONDA. TOMO XX. TORINO. DALLA STAMPERIA REALE, MDCCCLXIII. page 93, lig. 31-32. — REFLEXIONS NOUVELLES SUR DEUX MEMOIRES DE LAGRANRE PUBLIES EN 1769 DANS LE TOME IV DES *MISCELLANEA TAURINENSIA* PAR JEAN PLANA. TURIN. DE L'IMPRIMERIE ROYALE 1859, page 9, lig. 31-32) :

« Puis que je suis entré en la matiere des nombres rationaux j'adjousteray encor deux on trois particularitez non encor par cy devant practiquées, comme d'explicquer les radicaux extremement pres, par certains nombres à ce plus aptes & idoines que les autres, tellement que si l'on entreprenoit les mesmes choses par des autres nombres ce ne seroit sans grandement augmenter le nombres des characteres ; & pour exemple soit proposé d'explicquer par des rationaux la raison des segmens de la ligne coupée en la moyenne & extreme raison, soit faicte une telle progression 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, &c. dont chasque nõbre soit egal aux deux precedens, alors deux nombres pris immediatemẽt denotteront la mesme raison, comme 5 à 8 ou 8 à 13 &c. & tant plus grands, tant plus pres, comme ces deux 59475986 & 96234155, tellement que 13, 13, 21 constituent assez precisement un triangle Isosceles ayant l'angle du pentagone ».

Nous devons signaler dans ce passage d'ALBERT GIRARD, deux erreurs de calcul, qui ont été conservées, jusqu'à présent, dans les diverses reproductions qui en ont été faites. Les deux nombres de huit chiffres 59475986 et 96234155, doivent être remplacés par les termes de la série de Fibonacci dont les rangs sont 39 et 40, c'est-à-dire par 63245986 et 102334155, ainsi que cela résulte du tableau des soixante premiers termes de cette série, que nous donnons plus loin. La comparaison des deux résultats, identiques pour les quatre derniers chiffres, indique évidemment que les résultats erronés proviennent d'une faute d'addition commise dans le calcul des premiers chiffres de l'un des termes qui précédent.

En 1753, le D^r^. ROBERT SIMSON[2], professeur de mathématiques dans l'Université de Glasgow[3], dans un commentaire sur le passage de l'annotation ci-dessus mentionnée d'ALBERT GIRARD, a fait remarquer que la série en question est donnée par le calcul des *quotients* et des

« A. GIRARD a commenté le V^e^. et le VI^e^. Livre de DIOPHANTE vers 1634, sans avoir connaissance du commentaire sur DIOPHANTE, de BACHET DE MEZIRIAC qui avait paru en 1621. »

[1] L'ARITHMETIQVE DE SIMON STEVIN DE BRUGES, etc., page 677, lig. 1-17. — LES OEUVRES Mathematiques DE SIMON STEVIN de Bruges, etc., page 169, col. 3^e^-4^e^, page 170, col. 1, lig. 1-13. — BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE. PUBBLICATO DA B. BONCOMPAGNI, ETC. TOMO VII. ROMA, etc. 1874, page 559, lig. 1-10, page 560, lig. 1-10, NOVEMBRE 1874. — NOTIZIE STORICHE SULLE FRAZIONI CONTINUE DAL SECOLO DECIMOTERZO AL DECIMOSETTIMO PER ANTONIO FAVARO, etc. ROMA, etc. 1875 page 81, lig. 1-10, page 82, lig. 1-10.

[2] Ce savant né à Kirton-hall (Ayrshire) le 14 octobre 1687 (A PHILOSOPHICAL AND MATHEMATICAL DICTIONARY, etc. BY CHARLES HUTTON, etc. vol. II, etc. LONDON, etc. 1815, page 395, col 2^a^ lig. 11-14. — THE GENERAL DICTIONARY, etc. A NEW EDITION REVISED AND ENLARGED BY ALEXANDER CHALMERS F. S. A. VOL. XXVIII, LONDON , etc. 1816 , page 21, lig. 19-21) mourut le 1 octobre 1768 (A PHILOSOPHICAL AND MATHFMATICAL, etc. DICTIONARY, etc. BY CHARLES HUTTON, etc. VOL. II, etc., page 397, col. 2^a^, lig. 30-31. — THE GENERAL DICTIONARY, etc. VOL. XXVIII, etc., page 27, lig. 9).

[3] « *An Explication of an obscure Passage in* Albert Girard's *Commentary upon* Simon Stevin's *Works* (*Vide* Les Oeuvres Mathem. de Simon Stevin, à Leyde, 1634. p. 169, 170) ; *by Mr.* Simson, *Professor of Mathematics at the University of* Glasgow : *Communicated by the Right Honourable* Philip *Earl* Stanhope » (PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS, GIVING SOME ACCOUNT OF THE Present Undertakings, Studies, *and* Labours, OF THE INGENIOUS, IN MANY Considerable Parts of the WORLD. VOL. XLVIII. PART I. For the Year 1753. *LONDON*, etc. M.DCC.LIV, pages 368-376 ; page 377, lig. 1-5. — PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON FROM THEIR COMMENCEMENT EN 1665 TO THE YEAR 1800. Adbriged WITH NOTES AND BIOGRAPHICAL ILLUSTRATIONS BY CHARLES HUTTON , etc. VOL. X, LONDON , etc. 1809, pages 430-433 ; page 434, lig. 1-5).

fractions convergentes des expressions irrationnelles

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ ,$$

qui représentent respectivement les valeurs de

$$2\sin\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 2\sin 3\frac{\pi}{10}\ ,$$

Gabriel LAME, né à Tours le 22 juillet 1795[1], mort à Paris le 1er mai 1870[2], dans un travail présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 28 octobre 1844, indique l'application que l'on peut faire de cette série, à la détermination d'une limite supérieure du nombre des opérations à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers, lorsque l'on emploie la méthode ordinaire de 1a division[3].

On a en effet, le théorème suivant :

THEOREME. — *Le nombre des divisions à effectuer, pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers, par la méthode ordinaire de la division dans le système décimal, est toujours moindre que cinq fois le nombre des chiffres du plus petit des deux nombres entiers.*

Jacques BINET, né à Rennes le 2 février 1786[4] mort à Paris le 12 mai 1856[5] dans un travail présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 4 novembre 1844, remarque que la série de LAME 1, 2, 3, 5, 8, 13 . . . est identique à celle qui lui avait donné le dénombrement des combinaisons discontiguës[6], et dont il avait parlé dans un autre

---

[1] BULLETIN DES SCIENCES MATHEMATIQUES ET ASTROTRONOMIQUES, REDIGE PAR M. G. DARBOUX, AVEC LA COLLABORATION DE MM. HOUEL ET LOEWY, SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ETUDES. TOME PREMIER. – ANNEE 1870. PARIS, GAUTHIER-VILLARS, etc. 1870, page 224, lig. 12-14, JUILLET 1870.

[2] COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME SOIXANTE-DIXIEME, JANVIER-JUIN 1870. PARIS, GAUTHIER-VILLARS, etc. 1870, page 961, lig. 8-10, N.°18. SEANCE DU LUNDI 2 MAI 1870. — JOURNAL DES SAVANTS. ANNEE 1870. PARIS, IMPRIMERIE IMPERIALE. M DCCC LXX, page 327, lig. 13, MAI 1870. — BULLETIN DES SCIENCES MATHEMATIQUES, etc. TOME PREMIER. – ANNEE 1870, etc., page 224, lig. 12-14. — On trouve un catalogue des travaux de ce savant dans le volume intitulé « BULLETIN DES SCIENCES MATHEMATIQUES, etc. TOME PREMIER. ANNEE 1870 », etc. (page 224, lig. 26-35, pages 225-227, page 228, lig. 1-26).

[3] COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME DIX-NEUVIEME. JUILLET-DECEMBRE 1844. PARIS, etc. 1844, page 867, lig. 8-23, pages 868-869, page 870, lig. 1-3, N°18. SEANCE DU LUNDI 28 OCTOBRE 1845.

[4] LA FRANCE LITTERAIRE OU DICTIONNAIRE BIBLIOGRAPHIQUE, etc. PAR J.-M. QUERARD. TOME PREMIER. PARIS, etc. CHEZ FIRMIN DIDOT, PERE ET FILS, LIBRAIRES, RUE JACOB, N° 24, M DCCC XXVII, page 338, col. 22, lig. 10-14.

[5] COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME QUARANTE-DEUXIEME JANVIER-JUIN 1856. PARIS, MALLET-BACHELIER, etc. 1856, page 873, lig. 8-12, N° 19, SEANCE DU LUNDI 12 mai 1856. — JOURNAL DES SAVANTS. ANNEE 1856 PARIS, IMPRIMERIE IMPERIALE. MDCCCLVI, page 316, lig. 12-13, MAI 1856.

[6] « M. Lamé a rattaché sa démonstration ingénieuse a la considération d'une série récurrente particulière 1, 2, 3, 5, 8, 13 , ... , dont un terme g_n se forme de la somme des deux précédents : elle est identique à celle qui m'a donné l'expression du dénombrement des combinaisons discontiguës

travail présenté a la même Académie le 25 Septembre 1843[1]. Il démontre qu'avec un certain degré d'approximation on peut réduire le terme général de cette série à un monôme[2].

Enfin, dans un Mémoire publié en 1859, le Baron JEAN PLANA[3], a rappelé les travaux de R. Simson ; mais aucun des auteurs dont nous venons de parler, n'a attribué à FIBONACCI l'honneur de la découverte de cette série si remarquable.

Dans ce premier Chapitre, notre but est d'exposer quelques propriétés nouvelles de cette série si ancienne, et d'indiquer l'application de ces propositions à la recherche de la loi de distribution des nombres premiers.

§ 1.

La série dite de Lamé, mais considérée pour la première fois par Léonard de Pise, ainsi que nous venons de le dire, est une série récurrente donnée par la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ , \tag{1}$$

et par les deux conditions initiales

$$u_0 = 0 \ , \quad u_1 = 1 \ .$$

L'expression d'un terme quelconque de cette série est donnée, en fonction de son rang, par la formule

$$\sqrt{5}u_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n , \tag{2}$$

qu'il est facile de vérifier *a posteriori* à l'aide de la relation fonda-

---

[*Comptes rendus de* l'Académie, tome XVII , page 563], et l'on a *:* $g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$. » COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME DIX-NEUVIEME. JUILLET-DECEMBRE 1844, etc., page 939, lig. 25-28, page 940, lig. 1-2, N° 19, SEANCE DU LUNDI 4 NOVEMBRE 1844.

[1] COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME DIX-SEPTIEME. JUILLET-DECEMBRE 1843. PARIS, BACHELIER, etc. 1843, page 562, lig. 15-32, page 563, lig. 1-18, N°14, SEANCE DU LUNDI 25 SEPTEMBRE 1843.

[2] COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, ETC. TOME DIX-NEUVIEME. JUILLET-DECEMBRE 1844, etc., page 939, lig. 24-28, page 940, lig. 1-12.

[3] Cet illustre mathématicien et astronome né à Voghera le 8 novembre 1781 (MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, SERIE SECONDA, TOMO XXII. TORINO. DALLA STAMPERIA REALE, MDCCCLXV, page LII, lig. 3. — DELLA VITA DI GIOVANNI PLANA. DISCORSO LETTO ALLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DELLA REALE ACCADEMI A DELLE SCIENZE DI TORINO, nella seduta del 31 gennaio 1864, DAL CONTE FEDERICO SCLOPIS, VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA, TORINO, STAMPEPIA REALE, pag. 4, lig. 3), mourut à Turin le 20 janvier 1864 (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ADADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME CINQUANTE-HUITIEME. JANVIER-JUIN 1864. PARIS MALLET-BACHELIER, etc. 1864, page 181, lig. 9-10, N° 4, SEANCE DU LUNDI 25 JANVIER 1864. — MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, SERIE SECONDA, TOMO XII, etc., page LVIII, lig. 14. — DELLA VITA DI GIOVANNI PLANA, DISCORSO LETTO, etc. DAL CONTE FEDERICO SCLOPIS, etc., page 10 lig. 8).

mentale, et dont le développement ne contient rien d'irrationnel ; on a, en effet, la formule[1]

$$(3) \qquad 2^{n-1}u_n = \frac{n}{1} + 5\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + 5^2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} + \cdots$$

On verra par la suite, pourquoi nous avons ajouté à la série de Lamé les deux termes 0 et 1. On a donc, en supposant la série continuée dans les deux sens

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ldots & u_{-3}, & u_{-2}, & u_{-1}, & u_0, & u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & \ldots \\ & 2, & -1, & 1, & 0, & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & \ldots \end{array}$$

et l'on a d'ailleurs

$$u_{-n} + (-1)^n\, u_n = 0 .$$

On peut encore, à l'aide de cette dernière formule, et de la formule (2), développer par la série des puissances négatives du binôme, l'expression d'un terme quelconque u_{-n}, en une série convergente illimitée.

§ 2.

On peut considérer un certain nombre de séries récurrentes analogues à la précédente ; il suffit, pour cela, de conserver la loi de récurrence en changeant seulement les conditions initiales. Mais on comprend que si l'on change u_1 en conservant u_0, on obtient une série dont tous les termes sont égaux à ceux de la série ordinaire, multipliés par u_1. La série de Lamé généralisée, c'est-à-dire la série donnée par la même loi de récurrence, mais par des conditions initiales quelconques, jouit des propriétés suivantes : On a les deux formules symboliques

$$(4) \qquad u^{n+2p} = u^n\,(u+1)^p\ ,$$
$$(5) \qquad u^{n-p} = u^n\,(u-1)^p,$$

dans lesquelles on remplacera après le développement, les exposants de u par des indices. Ces formules se vérifient soit par induction, soit à l'aide de la formule (2), et sont également vraies, pour toutes les valeurs entières, positives ou négatives, des quantités n et p.

§ 3.

La série de Lamé généralisée possède encore les deux propriétés suivantes. On a les relations

$$(6) \qquad u_n\, u_{n+1} - u_{n+1}\, u_{n+2} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{K}\ ,$$
$$(7) \qquad u_n^2 - u_n^1 u_{n+1} = (-1)^n\,\mathrm{K},$$

dans lesquelles K désigne un nombre constant pour toute l'étendue de

[1] MANUEL DES CANDIDATS A L'ECOLE POLYTECHNIQUE, PAR EUGENE CATALAN, etc. *TOME PREMIER.* ALGEBRE, TRIGONOMETRIE, GEOMETRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS. Avec 167 figures intercalées dans le texte. PARIS, ecc. 1857, page 86, lig. 18-23, EXERCICES, VI.

la série, et que l'on détermine par les conditions initiales. Il résulte immédiatement de la dernière propriété, que les termes de rang pair sont des diviseurs de la forme quadratique $x^2 - Ky^2$, et que les termes de rang impair sont des diviseurs de la forme quadratique $x^2 + Ky^2$. On a d'ailleurs

$$4K = (2u_0 + u_1)^2 - 5u_1^2 \;;$$

par conséquent K est lui-même un diviseur impair de la forme quadratique $x^2 - 5y^2$, et, par suite, K est de cette même forme.

Dans la série ordinaire, on a K = 1 ;[1] les termes de rang impair de la série de Lamé ne peuvent contenir qu'une seule fois le facteur 2, et seulement les facteurs premiers impairs de la forme $4p + 1$**.** Nous verrons plus loin que u_{2n+1}, ne contient le facteur 2, que lorsque $2n + 1$ est un multiple de 3**.**

On a encore, dans la série ordinaire, les relations

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1, \\ u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}, \\ u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1, \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}, \\ u_{n-1}^2 + u_n^2 = u_{2n-1}, \\ u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_{n-2} = u_{2n-1}, \\ u_n^3 + u_{n+1}^2 - u_{n-1}^3 = u_{3n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

et beaucoup d'autres relations analogues qui s'appliquent, avec quelques changements, à la série généralisée.

§ 4.

La série de Lamé peut être considérée comme le résultat du calcul des réduites successives de la fraction continue périodique[2]

---

[1] Dans ce cas, on a, pour la série de FIBONACCI, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n-1}$

ALBERT GIRARD avait reconnu cette propriété (MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, SERIE SECONDA, TOMO XX, etc., page 90, lig. 21-23, page 91, lig. 1-5. — REFLEXIONS NOUVELLES SUR DEUX MEMOIRES DE LAGRANGE, etc. PAR JEAN PLANA, etc., page 6, lig. 21-33, page 7, lig. 1-5) ; mais la démonstration donnée par SIMSON de cette propriété n'était point rigoureuse, d'après l'observation du *Baron* PLANA (MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, SERIE SECONDA, TOMO XX, etc., page 91, lig. 6-7. — REFLEXIONS NOUVELLES SUR DEUX MEMOIRES DE LAGRANGE, etc. PAR JEAN PLANA, etc., page 7. lig. 6-7).

[2] MM. Clausen, Stern et Scheibner ont étudié cette série à un point de vue différent du mien (Journal für die reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von A. L. Crelle, etc. Dritter Band. In 4 Heften. Mit 4 Kupfertafeln. Berlin, bei G. Reimer, 1828, pages 87-88, Erster Heft. — Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form. Habilitations schrift zur Erlangung der venia legendi an der Universität Erlangen von Dr. Julius Siegmund

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}$$

prolongée indéfiniment, qui représente le développement de l'irrationnelle

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;$$

la $n^{ième}$ réduite de cette fraction continue, que l'on doit considérer comme la plus simple du genre des fractions continues périodiques, a pour expression

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\ ;$$

et par suite ce rapport tend vers l'irrationnelle donnée ci-dessus, lorsque le nombre n augmente indéfiniment.

On peut, d'après cette remarque, calculer rapidement un terme de la série connaissant seulement le précédent. Soit, par exemple,

$$u_{44} = 7014\ \ 08733\ ;$$

en calculant, par les méthodes abrégées, le produit de ce nombre par l'expression

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ \ 39887\ \ 39894\ \ 8482\ldots\ldots,$$

à une unité près, on trouve exactement, ainsi que l'indique la théorie de l'approximation par les fractions continues, puisque u_n est entier,

$$u_{45} = 11349\ \ 03170.$$

Nous indiquerons plus loin, comment l'on peut trouver facilement le dernier chiffre de u_n.

§ 5.

Nous ferons encore observer que la série en question se trouve implicitement renfermée dans le tableau des coefficients des diverses puissances du binôme, c'est-à-dire, dans le triangle arithmétique de Pascal. Si l'on cherche en effet la somme des termes contenus dans une rangée oblique, partant de la première colonne verticale des unités, et ascendante, telle que

$$1,\ 9,\ 28,\ 35,\ 15,\ 1.$$

ou, en général

Günther. I. Theil, Erlangen, 1872. Verlag von Eduard Besold, page 47, lig. 35, page 48, lig. 1-2, page 52, lig. 1-16).

$$1,\ C_n^1,\ C_{n-1}^2,\ C_{n-2}^3,\ \ldots\ ;$$

on obtient pour résultat le terme de rang $n + 2$ dans la série de Lamé, et l'on a

(9) $$1 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + C_{n-2}^3 + \ldots = u_{n+2}\ .$$

Le tableau ci-joint rend compte des résultats que nous venons d'indiquer :

Série de Fibonacci

Triangle arithmétique

1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	55,	89,	. .
1,	1,	:	:	:	:	:	:	:	:	:
1,	2,	1,	:	:	:	:	:	:	:	:
1,	3,	3,	1,	::	:	:	:	:	:	:
1,	4,	6,	4,	1,	:	:	:	:	:	:
1,	5,	10,	10,	5,	1,	:	:	:	:	:
1,	6,	15,	20,	15,	6,	1,	:	:	:	:
1,	7,	21,	35,	35,	21,	7,	1,	:	:	:
1,	8,	28,	56,	70,	56,	28,	8,	1,	:	:
1,	9,	36,	84,	126,	126,	84,	36,	9,	1,	:
1,	10,	45,	120,	210,	252,	210,	120,	45,	10,	1,

J'ai aussi remarqué que l'expression

(10) $$1 - C_{n,1} + C_{n-1,2} - C_{n-2,3} + \ldots$$

est égale à $+1$ si le reste de la division de n par 6 est 0 ou 5,
0 si 1 ou 4,
-1 si 2 ou 3[1].

En ajoutant et retranchant les deux formules obtenues ainsi, on obtient

[1] NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHEMATIQUE, REDIGEE PAR EUGENE CATALAN, etc. TOME DEUXIEME, 1876. BRUXELLES, F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE. 1876, page 74, lig. 6-13, MARS 1876. — Extrait de la *Nouvelle Correspondance Mathématique*, tome II, livraison de mars 1876. NOTE SUR LE TRIANGLE ARITHMETIQUE DE PASCAL ET SUR LA SERIE DE LAME ; par M. Édouard LUCAS, PROFESSEUR AU LYCEE DE MOULINS (ALLIER). In-8.°, de six pages, dans la 6ième desquelles (ligne dernière) on lit: « Bruxelles. – F. HAYEZ, impr. de l'Académie royale »), page 5, lig. 6-13.

deux formules nouvelles qui donnent l'expression des deux sommes

$$1+C_{n-1,2}+C_{n-3,4}+C_{n-5,6}+\ldots$$

$$C_{n,1}+C_{n-2,3}+C_{n-4,5}+C_{n-6,7}+\ldots$$

§ 6.

Prenons un terme quelconque de la série de Lamé, 144, par exemple, et considérons les termes qui le précédent, et qui le suivent immédiatement

. . . 21, 34, 55, 89, | 144 |, 233, 377, 610, 987, . . .

Si nous supprimons les multiples de 144, nous pouvons remplacer cette série par la suivante

. . . 21, 34, 55, 89, | 0 |, +89, –55, +34, 21, . . .

et nous voyons ainsi que nous reproduisons à partir du terme 144, les termes de la série pris dans un ordre inverse et avec des signes alternés + et – . Or la série contient le terme $u_0 = 0$; il en résulte, puisque ce raisonnement est évidemment général, que u_{mn} est toujours exactement divisible par u_m et par u_n , et par leur produit, si m et n sont premiers entre eux[1]. On déduit aussi de ce résultat qu'un terme quelconque u_p de la série ne peut être premier que lorsque p désigne lui-même un nombre premier. Ainsi encore puisque u_3 est divisible par 2 , il en est de même de u_{3n} et puisque u_5 est divisible par 5 , il en est de même de u_{5n}.

On peut d'ailleurs démontrer les résultats précédents à l'aide de l'expression générale du terme de rang n , donnée plus haut.

On voit encore aisément que, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres de la série, les restes successifs obtenus forment des termes de la série, et que les quotients approchés sont eux-mêmes les quotients exacts de certains termes de la série, que l'on peut dans chaque cas déterminer à priori.

On a donc le théorème suivant que l'on doit considérer, comme l'idée principale de toute cette théorie, et qui s'applique à toutes les séries récurrentes analogues :

THEOREME FONDAMENTAL *: Le plus grand commun diviseur de plusieurs termes de la série de Léonard de Pise, est égal au terme dont le rang représente le plus grand commun diviseur des nombres qui expriment les rangs des termes donnés.*

On peut aussi déterminer à l'avance le dernier chiffre du terme de rang n dans la série ; il suffit en effet de remarquer que ce dernier

---

[1] Quelques uns des résultats indiqués dans ce chapitre ont été énoncés et démontrés par M. GENOCCHI dans un écrit publié en 1868 (ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA. DIRETTI DA F. Brioschi e L. Cremona, etc. SERIE II. - TOMO II. (dall'agosto 1868 al giugno 1869). MILANO. TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BERNARDONI, pages 256-267).

chiffre dépend seulement du reste de la division de n par 60 . Si l'on suppose, par conséquent n inférieur à 60 , on peut aisément démontrer que les derniers chiffres de u_m et de u_n sont complémentaires, c'est-à-dire ont une somme égale à 10, lorsque la somme m n est égale à 60. On peut donc maintenant supposer n inférieur à 30 ; on peut même supposer n inférieur à 15 , si l'on remarque que les termes u_{15+a} et u_{15-a} ont leurs derniers chiffres égaux lorsque a est impair, et complémentaires, lorsque a est pair.

§ 7.

Nous démontrerons quelques unes des formules données plus haut, et nous les généraliserons de la façon suivante. Pour cela, nous, poserons

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=a \quad , \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}=b \ ;$$

nous aurons

$$a + b = 1 \quad , \quad \text{et} \quad ab = -1 \ ,$$

par conséquent, a et b sont les deux racines de l'équation

$$x^2 = x + 1 \ ;$$

nous savons, d'autre part, que le $n^{ième}$ terme de la série de Lamé est donné par l'expression

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} .$$

Nous pouvons obtenir la somme des n premiers termes de la série, en les prenant de p en p ; on a, en effet,

$$u_p + u_{2p} + u_{3p} + \ldots + u_{np} = \frac{a^p + a^{2p} + \ldots + a^{np}}{\sqrt{5}} - \frac{b^p + b^{2p} + \ldots + b^{np}}{\sqrt{5}} ,$$

et à l'aide de la formule qui donne 1a somme des termes d'une progression géométrique,

$$\sqrt{5}\left[u_p + u_{2p} + u_{3p} + \ldots + u_{np}\right] = \frac{a^{np+p} - a^p}{a^p - 1} - \frac{b^{np+p} - b^p}{b^p - 1} ,$$

on, trouve, en simplifiant, le résultat

$$u_p + u_{2p} + u_{3p} + \ldots + u_{np} = \frac{u_{np+p} - (-1)^p u_{np} - u_p}{\frac{u_{2p}}{u_p} - (-1)^p - 1} .$$

En particulier, si l'on suppose $p = 1$, on retrouve la première des formules (8), qui donne la somme des n premiers termes de la série ; et, si l'on fait $p = 2$, on retrouve la troisième des formules (8), qui donne la somme des n premiers termes de rang pair dans la série.

On obtiendra, de même, la formule plus générale

$$u_{p+r}+u_{2p+r}+\ldots+u_{np+r}=\frac{u_{np+p+r}-(-1)^p u_{np+r}-u_{p+r}+(-1)^p u_r}{\dfrac{u_{2p}}{u_p}-(-1)^p-1}\;;$$

On peut encore obtenir de la même manière la somme des termes du premier membre de la formule précédente, en les prenant alternativement avec les signes de l'addition et de la soustraction.

§ 8.

Considérons maintenant deux nombres impairs n et p, et posons,

$$a^n=\alpha,\qquad b^n=\beta,\qquad \alpha\beta=-1\;;$$

nous avons, par la formule du binôme

$$(\alpha-\beta)^p=(\alpha^p-\beta^p)-\frac{p}{1}\alpha\beta(\alpha^{p-2}-\beta^{p-2})+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\alpha^2\beta^2(\alpha^{p-4}-\beta^{p-4})-\ldots,$$

et, en introduisant les termes de la série, nous avons donc, pour n et p *impairs*, la formule

$$(11)\qquad 5^{\frac{p-1}{2}}u_n^p=u_{np}-\frac{p}{1}u_{(p-2)n}+\frac{p(p-1)}{1.2}u_{(p-4)n}+\ldots+\frac{p(p\text{-}1)\ldots\frac{p+3}{2}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,\frac{p\text{-}1}{2}}u_n\,.$$

Ainsi, dans le cas particulier de $p = 3$, on a, en supposant *n impair*

$$5u_n^3=u_{3n}+3u_n\;,$$

et, par suite,

$$\frac{u_{3n}}{u_n}=5u_n^2-3\;.$$

On a donc le théorème suivant :

THEOREME. — *Si* n *désigne un nombre impair quelconque, les diviseurs de* $\dfrac{u_{3n}}{u_n}$ *sont des diviseurs de la forme quadratique* $5x^2-3y^2$.

On sait, d'ailleurs, que les diviseurs quadratiques de cette forme sont de l'une des formes

$$\pm(u^2-15v^2)\;,\qquad \pm(5u^2-3v^2)\;,$$

et que les diviseurs linéaires impairs sont compris dans l'une des formes suivantes

$$60q+1,\ 49,\ 11,\ 59,\qquad 60q+7,\ 43,\ 17,\ 53.$$

Si nous supposons *n pair* et *p impair*, nous trouvons de même la formule

$$(12)\qquad 5^{\frac{p-1}{2}} u_n^p = u_{np} - \frac{p}{1} u_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1.2} u_{(p-4)n} + \ldots \pm \frac{p(p-1)\ldots\frac{p+3}{2}}{1.2\ldots\frac{p-1}{2}} u_n\ ,$$

dans laquelle nous prendrons le signe + ou le signe – dans le dernier terme, suivant que p représente un multiple de 4 augmenté ou diminué de l'unité.

Dans le cas particulier de $p = 3$, on a, en supposant *n pair,*

$$5u_n^3 = u_{3n} - 3u_n\ ,$$

et, par suite,

$$\frac{u_{3n}}{u_n} = 5u_n^2 + 3.$$

De là, la proposition suivante

THEOREME. – *Si n désigne un nombre pair quelconque, les diviseurs de* $\frac{u_{3n}}{u_n}$ *sont des diviseurs de la forme quadratique* $5x^2 + 3y^2$.

On sait encore que les diviseurs quadratiques de cette forme sont de l'une des deux formes

$$u^2 + 15v^2, \qquad 3u^2 + 5v^2,$$

et que les diviseurs impairs correspondants sont

$$30q + 1,\ 19, \qquad 30q + 17,\ 23.$$

Il résulte des formules (11) et (12) une conséquence importante. Supposons p premier impair, et u_n divisible par p^λ ; on voit alors que u_{pn}, est divisible par $p^{\lambda+1}$, et non par une autre puissance de p ; de là, le théorème suivant qui exprime la LOI DE LA REPETITION de la présence d'un nombre premier dans la série de Fibonacci :

THEOREME. — *Si n désigne le rang d'un terme de la série contenant le facteur premier p à la puissance λ, le rang du premier terme de cette série divisible par la puissance λ + 1 de p, et non par une puissance supérieure, est égal à pn.*

Ainsi, par exemple, u_8 est divisible par 7 ; donc le premier terme de la série divisible par $\mathbf{7}^\lambda$ est de rang $8 \times 7^{\lambda-1}$ **;** nous avons vu d'ailleurs, que n diffère toujours de p, excepté pour $n = 5$; le cas de $p = 2$ présente une légère exception pour $u_6 = 2^3$**.** Nous verrons plus loin que n est toujours un diviseur de $p \pm 1$.

§ 9.

Nous supposerons que p désigne un nombre pair, et nous poserons

$$v_q = \frac{u_{2q}}{u_q} = \frac{a^{2q} - b^{2q}}{a^q - b^q} = a^q + b^q \ ,$$

et, par conséquent, v_q représente la somme des racines de l'équation

$$x^2 = x + 1 \ ,$$

élevées à la puissance q. Si nous supposons n impair, nous avons,

$$(\alpha - \beta)^p = (\alpha^p + \beta^p) - \frac{p}{1}\alpha\beta(\alpha^{p-2} + \beta^{p-2}) + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}\alpha^2\beta^2(\alpha^{p-4} + \beta^{p-4}) + \ldots .$$

ou, en d'autres termes, nous obtenons pour *n impair et p pair*, la formule

$$(13) \qquad 5^{\frac{p}{2}} u_n^p = v_{np} + \frac{p}{1} v_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2} v_{(p-4)n} + \ldots . + \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots ..\left(\frac{p}{2}\right)}$$

Dans le cas particulier de $p = 2$, et pour *n impair*, on a donc

$$5u_n^2 = v_{2n} + 2 \ ,$$

et, par suite, la proposition suivante :

THEOREME. — *Si n désigne un nombre impair quelconque, les diviseurs de* $\frac{u_{4n}}{u_{2n}}$ *sont des diviseurs de la forme quadratique* $5x^2 - 2y$.

Les diviseurs quadratiques de cette forme sont de l'une des deux formes

$$u^2 - 10v^2 \ , \qquad 2u^2 - 5v^2 \ ,$$

et les diviseurs linéaires impairs correspondants sont

$$40q + 1 \ , \ 9 \ , \ 31 \ , \ 39 \ , \qquad 40q + 3 \ , \ 13 \ , \ 27 \ , \ 37$$

Supposons enfin que n et p représentent tous deux des nombres *pairs,* nous avons alors la formule

$$(14) \qquad 5^{\frac{p}{2}} u_n^p = v_{np} - \frac{p}{1} v_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2} v_{(p-4)n} - \ldots . \pm \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots ..\left(\frac{p}{2}\right)}$$

dans laquelle nous prendrons le dernier terme avec le signe + ou le signe – , suivant que la moitié de p est un nombre pair ou impair. Dans le cas particulier de $p = 2$, et pour *n pair,* on a donc

$$5u_n^2 = v_{2n} + 2$$

et ainsi, la proposition suivante :

THEOREME, — *Si n désigne un nombre pair quelconque, les diviseurs de* $\frac{u_{4n}}{u_{2n}}$ *sont des diviseurs de la forme quadratique* $5x^2+2y^2$.

Les diviseurs quadratiques de cette forme sont de l'une des deux formes

$$u^2 + 10v^2 \ , \qquad 2u^2 + 5v^2 \ ,$$

et les diviseurs linéaires impairs correspondants sont

$$40q + 1 \ , \ 9 \ , \ 11 \ , \ 19 \ , \qquad 40q + 7 \ , \ 13 \ , \ 23 \ , \ 37$$

§ 10.

Le développement de $(\alpha + \beta)^p$ donne lieu encore à un certain nombre de formules analogues. On a, en effet ,

$$(\alpha+\beta)^p = \left(\alpha^p + \beta^p\right) + \frac{p}{1}\alpha\beta\left(\alpha^{p-2} + \beta^{p-2}\right) + \ldots\ldots \ ;$$

et par suite, pour *p impair* et *n pair,* on a la formule,

$$(15) \qquad v_n^p = v_{pn} + \frac{p}{1}v_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}v_{(p-4)n} + \ldots. + \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p+3}{2}\right)}{1\,.\,2\ldots..\left(\frac{p-1}{2}\right)}v_n \ ;$$

pour *p impair* et *n impair,* on a la formule

$$(16) \qquad v_n^p = v_{pn} - \frac{p}{1}v_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}v_{(p-4)n} + \ldots. \pm \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p+3}{2}\right)}{1\,.\,2\ldots..\left(\frac{p-1}{2}\right)}v_n ,$$

dans laquelle nous prenons le dernier terme avec le signe + ou le signe – , suivant que *p* représente un multiple de 4 augmenté ou diminué de l'unité. En supposant, au contraire *p* pair, on a les formules suivantes : pour *p pair* et *n pair,*

$$(17) \qquad v_n^p = v_{pn} + \frac{p}{1}v_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}v_{(p-4)n} + \ldots. + \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots..\left(\frac{p}{2}\right)} \ ;$$

pour *p pair* et *n impairs* on a la formule

$$(18) \qquad v_n^p = v_{pn} - \frac{p}{1}v_{(p-2)n} + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}v_{(p-4)n} - \ldots. \pm \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots..\left(\frac{p}{2}\right)} \ ,$$

dans laquelle nous prendrons le dernier terme avec le signe + ou le signe – suivant que *p* représente un multiple de 4 ou un multiple de 4 augmenté de 2.

En particulier, on a, pour *p* =3 et *n pair*

$$v_n^3 = v_{3n} + v_n \ ,$$

et, par suite,

$$\frac{v_{3n}}{v_n} = v_n^2 - 3 \ ,$$

formule de laquelle on déduit la proposition suivante

THEOREME, — *Si n désigne un nombre pair quelconque, les diviseurs de* $\frac{v_{3n}}{v_n}$ *sont des diviseurs de la forme quadratique* $x^2 - 3y^2$.

Les diviseurs quadratiques de cette forme sont de la forme

$$u^2 - 3v^2 \qquad \text{ou} \qquad 3u^2 - v^2$$

auxquelles correspondent les diviseurs linéaires impairs des formes

$$12\,q + 1 \qquad \text{ou} \qquad 12\,q + 11$$

THEOREME, — *Si n désigne un nombre pair quelconque, les diviseurs de* $\frac{v_{3n}}{v_n}$ *sont des diviseurs de la forme quadratique* $x^2 + 3y^2$.

Les diviseurs quadratiques de cette forme sont compris dans la forme

$$u^2 + uv + v^2,$$

à laquelle correspond la forme

$$6\,q + 1$$

des diviseurs linéaires impairs.

En particulier, on a encore pour $p = 2$

$$v_n^2 = v_{2n} + 2(-1)^n \ ,$$

et cette formule donne le théorème suivant

THEOREME, — *Les diviseurs de* v_{2n} *sont les diviseurs quadratiques de la forme* $x^2 - 2y^2$, *ou de la forme* $x^2 + 2y^2$, *suivant que n représente un nombre pair ou un nombre impair.*

Les diviseurs quadratiques de ces formes ont la même forme, respectivement ; les diviseurs linéaires impairs sont des formes

$8q + 1, \quad 7,$ pour la première,
$8q + 1, \quad 3,$ pour la seconde .

Il serait assez facile d'obtenir un grand nombre d'autres théorèmes semblables à ceux que nous venons de démontrer.

§ 11.

Nous venons d'exprimer, dans le paragraphe précédent, les puissances de u_n en fonction linéaire des termes dont le rang est un multiple de n ; on peut, inversement, développer u_{pn} et v_{pn} suivant des polynomes ordonnés d'après les puissances de u_n par des formules analogues à celles qui donnent les sinus et cosinus des multiples d'un arc, suivant les puissances du sinus ou du cosinus de cet arc. On a, en effet, la formule suivante due à Abraham De Moivre[1]

$$z^p + \frac{1}{z^p} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^p - \frac{p}{1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{p-2} + \frac{p(p-3)}{1\,.\,2}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{p-4} - \frac{p(p-4)(p-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{p-6}$$
$$+\,.\,.\,.\,.+(-1)^r\,\frac{p(p-r-1)(p-r-2)\,.\,.\,.\,(p-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,r}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{p-2r} + \,.\,.$$

Supposons tout d'abord n impair, et posons

$$a^n = z\,, \qquad b^n = -\frac{1}{z}\,,$$

nous obtenons ainsi

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{5}u_n\,, \qquad z^p + \frac{1}{z^p} = \sqrt{5}u_{np}\,.$$

On a donc, pour n et p *impairs,* la formule

$$(19)\quad \begin{aligned} u_{np} &= 5^{\frac{p-1}{2}}u_n^p - \frac{p}{1}5^{\frac{p-3}{2}}u_n^{p-2} + \frac{p(p-3)}{1\,.\,2}5^{\frac{p-5}{2}}u_n^{p-4} - \frac{p(p-4)(p-5)}{1\,.\,2\,.\,3}5^{\frac{p-7}{2}}u_n^{p-6} \\ &+\,.\,.\,.+(-1)^r\,\frac{p(p-r-1)(p-r-2)\,.\,.\,.\,(p-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,r}5^{\frac{p-2r-1}{2}}u_n^{p-2r} + \,.\,.\,.\,. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $p = 5$, et n *impair,*

---

[1] COMMENTARII ACADEMIÆ SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANÆ*. TOMVS XIII. AD ANNVM MDCCXLI–XLIII. PETROPOLI. *TYPIS ACADEMIÆ*. MDCCLI, page 29, lig. 17-22. — Journal für die reine und angewandte Mathematik, etc. Herausgegeben Von A. L. Crelle, etc. Siebenzehnter Band, etc. Berlin. 1837, page 334, lig. 18-21. — NOVI COMMENTARII ACADEMIÆ SCIENTIARUM IMPEPIALIS PETROPOLITANÆ TOM. XVIII. Pro Anno MDCCLXXIII. PETROPOLI TYPIS ACADEMIÆ SCIENTIARUM MDCCLXXIV, page 201, lig. 12-27. — SEANCES DES ECOLES NORMALES, RECUEILLIES PAR DES STENOGRAPHES, ET REVUES PAR LES PROFESSEURS. NOUVELLE EDITION. *LEÇONS*. TOME DIXIEME. PARIS, A L'IMPRIMERIE DU CERCLE-SOCIAL. (1801.) AN 9 DE LA REPUBLIQUE FRANÇAISE, pages 150 183. JOURNAL DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, etc. DOUZIEME CAHIER. TOME V, A PARIS, etc. THERMIDOR AN XII, page 95, lig. 23-29, pages 96-114, page 115, lig. 1-16. — LECONS SUR LE CALCUL DES FONCTION, NOUVELLE EDITION, etc. A PARIS, etc. AN 1806, pages 126-150. — COURS D'ANALYSE DE L'ECOLE, POLYTECHCNIQUE, PAR M. CH, HERMITE, etc. PREMIERE PARTIE. PARIS, GAUTHIER-VILLARS, etc. 1873. (Tous droits réservés), page 62, lig. 22-27. — BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE etc. TOMO VII. ROMA, ecc. 1874, page 395, lig. 28-41. — COURS D'ANALYSE DE L'ECOLE POTYTECHNIQUE, PAR M. CH. HERMITE, PREMIERE PARTIE. COMPTE RENDU ANALYTIQUE. PAR M. P, MANSION, etc. ROME, etc. 1874, page 16, lig. 3-5, 17-34).

$$\frac{u_{5n}}{5u_n} = 5u_n^4 - 5u_n^2 + 1.$$

On a, de même, en supposant que p désigne un nombre *pair*

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{5}u_n \ , \qquad z^p + \frac{1}{z^p} = v_{np} \ ,$$

et, par suite, pour n *impair et* p *pair*, on a la formule

$$(20) \quad \begin{aligned} v_{np} &= 5^{\frac{p}{2}} u_n^p - \frac{p}{1} 5^{\frac{p-1}{2}} u_n^{p-2} + \frac{p(p-3)}{1\,.\,2} 5^{\frac{p-2}{2}} u_n^{p-4} - \frac{p(p-4)(p-5)}{1\,.\,2\,.\,3} 5^{\frac{p}{2}-3} u_n^{p-6} \\ &+ \ldots + (-1)^r \frac{p(p-r-1)(p-r-2)\ldots(p-2r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,r} 5^{\frac{p-2r}{2}} u_n^{p-2r} + \ldots ; \end{aligned}$$

par exemple, pour $p = 4$ et n *impair* ,

$$v_{4n} = 25u_n^4 - 20u_n^2 + 2 \ .$$

2° Supposons maintenant n pair ; en posant

$$a^n = z \ , \quad b^n = \frac{1}{z}$$

et, si l'on observe que

$$z + \frac{1}{z} = v_n \ , \qquad z^p + \frac{1}{z^p} = v_{np} \ ,$$

on a dans le cas de n *pair*, et quelle que soit la parité ou l'imparité de p, la formule

$$(21) \qquad v_{np} = v_n^p - \frac{p}{1} v_n^{p-2} + \frac{p(p-3)}{1\,.\,2} v_n^{p-4} - \frac{p(p-4)(p-5)}{1\,.\,2\,.\,3} v_n^{p-6} + \ldots ;$$

ainsi, pour $p = 5$ et n *pair*

$$\frac{v_{5n}}{v_n} = v_n^4 - 5v_n^2 + 5 \ ;$$

et pour $p = 4$ et n *pair*

$$v_{4n} = v_n^4 - 4u_n^2 + 2 = (v_n^2 - 2)^2 - 2$$

On peut obtenir d'autres formules ; en effet, remplaçons, dans le développement de $z^p + \dfrac{1}{z^p}$, z par zi , i désignant $\sqrt{-1}$; on a, après avoir divisé par i^p,

$$z^p + \frac{(-1)^p}{z^p} = \left(z - \frac{1}{z}\right)^p + \frac{p}{1}\left(z - \frac{1}{z}\right)^{p-2} + \frac{p(p-3)}{1\,.\,2}\left(z - \frac{1}{z}\right)^{p-4} + \ldots ;$$

tous les coefficients du second membre sont précédés du signe + ; on obtient donc, pour n *pair* et p *impair* une formule que l'on déduit de la formule (19) en prenant tous les termes du second membre avec le même signe ; et, dans le cas où n et p sont deux nombres pairs, on obtient une formule, que l'on déduit de la formule (20), en prenant tous les termes du second membre avec le signe de l'addition.

§ 12.

Nous allons faire voir maintenant que la série de Lamé contient sans aucune exception tous les nombres premiers, à des rangs nettement déterminés, et démontrer le théorème suivant qui exprime la LOI DE L'APPARITION d'un nombre premier, dans cette série[1] :

THEOREME, — *Si p désigne un nombre premier de la forme* $10q\pm1$, *le terme de rang* $p-1$ *dans la série de Lamé est divisible, par* p , *et si* p *désigne un nombre premier de la forme* $10q\pm3$, *le terme de rang* $p+1$ *dans la série de Lamé est divisible par* p.

Il reste deux nombres premiers qui ne sont pas contenus dans les formes précédentes, à savoir 2 et 5 ; mais nous avons parlé de ces deux facteurs dans le paragraphe 6. Si l'on remarque d'ailleurs que la

---

[1] Quelques uns des résultats suivants ont été présentés, sans démonstration, à l'Académie des Sciences de Paris, dans la séance du 10 Janvier 1876 (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME QUATRE-VINGT-DEUXIEME. JANVIER-JUILLET *(sic)* 1876. PARIS, etc. 1876, page 165, lig. 22-32, page 166-167, N° 2. SEANCE DU LUNDI 10 JANVIER 1876). — On trouve des nouveaux développements à ce sujet dans un travail présenté à l'Académie Royale des Sciences de Turin dans la Séance du 21 Mai 1876 (ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, etc. VOLUME UNDECIDO, 1875-76, STAMPERIA REALE DI TORINO DI G. B. PARAVIA E C., pages 928-937. DISP. 6[a] *(Maggio-Giugno* 1876.). CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE. Maggio 1876. Adunanza del 21 Maggio 1876. — SUR LA THEORIE DES NOMBRES PREMIERS, PAR EDOUARD LUCAS, ANCIEN ELEVE DE L'ECOLE NORMALE, AGREGE DE L'UNIVERSITE, IMPRIMERIE ROYALE DE TURIN, 1876 (In 8.°, de 12 pages, dans la seconde desquelles on lit « Extr. des *Atti dalla Reale Accademia delle Scienze di Torino* , Vol. XI. Séance du 21 Mai 1876 »), dans trois écrits présentés à l'Académie des Sciences (Institut National de France) dans les séances du 5 juin, 27 décembre 1876, et 5 mars 1877 (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME QUATRE-VINGT-DEUXIEME. JANVIER-JUILLET 1876, etc. , pages 1303-1304, page 1305 , lig. 1-15, N° 23. – SEANCE DU LUNDI 5 JUIN 1875 *(sic). – Sur les rapports qui existent entre la théorie des nombres et le Calcul intégral,* PAR M. E. LUCAS (In 4.° de trois pages, dans la troisième desquelles numerotèe 3 (lig. 19-21) on lit : « (5 juin 1876.) GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SEANCE DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, PARIS. - Quai des Augustins, 55 »). — COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME QUATRE-VINGT-TROISIEME. JUILLET-DECEMBRE 1876. PARIS, etc. 1876, page 1286, lig. 18-34, page 1287, page 1288, lig. 1-23, N.° 26. – SEANCE DU MERCREDI 27 DECEMBRE 1876. — COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME QUATRE-VINGT-QUATRIEME. JANVIER-JUILLET (sic) 1877. PARIS. GAUTHIER-VILLARS, etc. 1877, page 439, lig. 18-31, pages 440-441, page 442, lig. 1-12, N° *10.* - SEANCE DU LUNDI 5 MARS 1877. — *Sur l'extension du théorème de Fermat généralisé et du Canon arithmeticus ;* PAR M. ED. LUCAS (In 4° de 4 pages, dans la quatrième desquelles, numérotée 4 (lig. 26-28) on lit : « (5 mars 1877.) GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES-RENDUS DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, Paris. - Quai des Augustins, 55 »), et dans une note présentée au Congrès du 1876 de Clermont-Ferrand de l'Association Francaise pour l'avancement des sciences, dans la séance du 19 août 1876 ; (ASSOCIATION FRANCAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES, CONGRES DE CLERMONT-FERRAND, 1876, PARIS. Au SECRETARIAT DE L'ASSOCIATION, 76, rue de Rennes (In 8.°, de 7 pages), M. EDOUARD LUCAS, Professeur au lycée Charlemagne, SUR LA RECHERCHE DES GRANDS NOMBRES PREMIERS - Séance du 19 août 1876).

série de Lamé est donnée, comme nous l'avons dit, par le calcul des réduites de la fraction continue périodique la plus simple, il semblerait résulter, du rapprochement de cette remarque et du théorème précédent, que le système décimal serait le système naturel de numération, si toutefois il était possible de définir mathématiquement un tel système ; ou encore, le système de base 5, si l'on remarque que le nombre premier 2 rentre dans la seconde forme $5q \pm 3$, et arrive au rang indiqué par le théorème précédent.

1° En effet, supposons d'abord que le nombre premier p soit de la forme $10q \pm 3$. On, a, d'après la formule (3) du §1,

$$2^p u_{p+1} = \mathrm{C}_{p+1,1} + 5\mathrm{C}_{p+1,3} + \ldots + 5^{\frac{p-1}{2}} ;$$

si l'on remarque que $\mathrm{C}_{p+1,n}$ est divisible par le nombre premier p , lorsque n est différent de 1 ou de $p-1$, et que $\mathrm{C}_{p+1,n}$ est égal à $p+1$ **,** on obtient, suivant le module p , la congruence

$$2^p u_{p+1} \equiv 1 + 5^{\frac{p+1}{2}}, \ (\mathrm{Mod.}\, p),$$

Mais puisque 5 est non-résidu quadratique de tout nombre impair de la forme $5n \pm 2$, le second membre de la congruence est un multiple de p , en vertu du théorème de Fermat qui donne la relation

$$5^{p-1} - 1 \equiv 0, \ (\mathrm{Mod.}\, p),$$

que l'on peut écrire

$$\left[5^{\frac{p-1}{2}} - 1\right]\left[5^{\frac{p-1}{2}} + 1\right] \equiv 0, \ (\mathrm{Mod.}\, p).$$

Il en résulte que $2^p u_{p+1}$ et, par suite, u_{p+1} est divisible par p ; c'est la première partie du théorème qu'il s'agissait de démontrer.

2° Désignons maintenant par p un nombre premier de la forme $10q \pm 1$ **;** on a alors

$$2^{p-2} p_{p-1} = \mathrm{C}_{p-1,1} + 5\mathrm{C}_{p-1,3} + \ldots + 5^{\frac{p-2}{2}} .$$

Mais si nous remarquons que, pour le module premier p , on,a généralement

(10) $$\mathrm{C}_{p-1,2n+1} \equiv -1, \ (\mathrm{Mod.}\, p),$$

il en résulte

$$2^{p-2} u_{p-1} \equiv -\left[1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{\frac{p-3}{2}}\right], \ (\mathrm{Mod.}\, p),$$

et, par suite

$$2^p u_{p-1} \equiv 1 - 5^{\frac{p-1}{2}}, \ (\mathrm{Mod.}\, p) .$$

Mais puisque 5 est résidu quadratique de tous les nombres premiers qui sont résidus quadratiques de 5, le second membre de la congruence est divisible par p ; il en est donc de même de u_{p-1} .

Les propositions qui concernent les résidus quadratiques de 5, qui nous ont servi dans la démonstration des deux propriétés précédentes, sont démontrées aux numéros 121, 122 et 123 des *Disquisitiones Arithmeticæ* de GAUSS.

Quant à la démonstration de la formule (10), elle devient immédiate si l'on se rappelle la loi de formation du triangle arithmétique de Pascal. On a, en effet

$$C_{p-1,n} + C_{p-1,n\text{-}1} = C_{p,n} ,$$

et par conséquent, suivant le module premier p , puisque $C_{p,n}$ est divisible par p ,

$$C_{p-1,n} \equiv -C_{p-1,n-1} ,$$

et l'on a d'ailleurs

$$C_{p-1,n} \equiv -1 ,$$

On peut, de cette facon, obtenir un certain nombre d'autres formules pour les résidus de $C_{p-k,n}$,suivant le module p , que l'on peut exprimer en fonction de $C_{k,n}$.

§ 13.

On déduit, des résultats des deux paragraphes précédents, qu'un nombre prémier p de la forme $10q \pm 1$ divise tous les termes de la série dont le rang est égal à un multiple quelconque d'un certain diviseur de $p - 1$, et n'en divise aucun autre. Et, de même, un nombre premier p de la forme $10q \pm 3$ divise tous les termes de la série dont le rang est égal à un multiple quelconque d'un certain diviseur de $p+1$. On peut d'ailleurs dans un grand nombre de cas déterminer le diviseur en question.

On peut aussi reconnaître, dans la plupart des cas, si l'un des facteurs d'un terme de la série est premier ou ne l'est pas. Si, en effet, on commence par diviser un terme quelconque u_n de la série par tous les facteurs premiers contenus dans les termes u_k dont le rang k désigne un diviseur quelconque de n , on obtient pour quotient un nombre Q dont tous les diviseurs, que nous appellerons *diviseurs propres* de u_n sont nécessairement de la forme $2qn \pm 1$.

Considérons, par exemple, le terme

$$u_{29} = 514229 ;$$

puisque le rang de ce terme est premier, ce terme n'est divisible par aucun des facteurs premiers contenus dans les termes qui le précèdent, et tous ses diviseurs sont de la forme

$$29q \pm 1 ;$$

d'autre part, puisque ce terme a un rang impair, tous ses facteurs premiers sont de la forme $4r + 1$; par conséquent u_{29} ne peut admettre que les diviseurs premiers de la forme

$$116\,p + 1 \quad , \qquad \text{et} \qquad 116\,p + 57 \ ;$$

et l'essai des deux nombres 173 et 349 indique immédiatement que u_{29} est un nombre premier ; car il est inutile d'essayer le facteur 233 qui a déjà paru dans la série.

Soit encore le terme

$$u_{55} = u_5 \times u_{11} \times 313\,67101 \ ;$$

on aperçoit presque immédiatement que le dernier facteur est divisible par 661, et donne pour quotient le nombre premier 474541.

J'ai indiqué ailleurs un procédé qui permet de diminuer considérablement, à l'aide de la table des logarithmes, la longueur de ces essais[1].

§ 14.

On voit ainsi, que l'on peut obtenir par les considérations précédentes, un procédé qui permet de décider si un nombre donné p est premier ; et ce procédé est infiniment moins laborieux que celui que l'on déduit du théorèmede Wilson. J'ai ainsi vérifié, mais une seule fois, je l'avoue, que le nombre $A=2^{127} - 1$ est un nombre premier ; ce nombre contient *trente-neuf* chiffres, tandis que suivant EULER[2] et LEGENDRE[3] le plus grand nombre premier connu est

$$2^{21} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647.$$

En effet A est un nombre terminé par un *sept* ; si A est premier, u_{A+1} doit être divisible par A ; d'autre part si θ désigne un facteur de A ,

---

[1] NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES. JOURNAL DES CANDIDATS AUX ECOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE, REDIGE PAR MM. GERONO, etc. ET CH. BRISSE, etc. DEUXIEME SERIE. *TOME QUATORZIEME.* PARIS, etc., 1875, page 523, lig. 25-30, pages 524-525, NOVEMBRE 1875.

[2] « Le plus grand nombre premier que nous connaissions est sans doute $2^{31} - 1 = 2147483647$, que Fermat a déjà assuré être premier, & moi je l'ai aussi prouvé ; car puisque cette formule ne saurait admettre d'autres diviseurs que de l'une & ou *(sic)* de l'autre de ces 2 formes $248n + 1$ & $248n + 63$, j'ai examiné tous les nombres premiers contenus dans ces deux formules jusqu'à 46339, dont aucun ne s'est trouvé diviseur » *(NOUVEAUX MEMOIRES* DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES. *ANNEE MDCCLXXII.* AVEC L'HISTOIRE POUR LA MEME ANNEE. *A BERLIN.* CHEZ CHRETIEN FREDERIC VOSS. MDCCLXXIV, HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES, PAGE 36, lig. 16-21).

[3] « Si l'on considère en même temps que le nombre 2A est de la forme $t^2 - 2$, et qu'en conséquence les diviseurs de A doivent être de l'une des formes $8n + 1$, $8n + 7$, on trouvera en combinant ces dernières formes avec la première $62x + 1$, que tout diviseur premier de A est nécessairement de l'une de ces formes $248z + 1$, $248z + 63$. Or Euler nous apprend (Mém. de Berlin, ann. 1772, pag. 36) qu'après avoir essayé tous les nombres premiers contenus dans ces formes, jusqu'à 46339, racine du nombre A, il n'en a trouvé aucun qui fut diviseur de A ; d'ou il faut conclure, conformément à une assertion de Fermat, que le nombre $2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$ est un nombre premier. C'est le plus grand de ceux qui aient été vérifiés jusqu'à présent » (THEORIE DES NOMBRES. TROISIEME EDITION. PAR ADRIEN-MARIE LEGENDRE. TOME I. PARIS CHEZ FIRMIN DIDOT FRERES, LIBRAIRES, RUE JACOB , N° 24. 1830, page 229, lig. 3-14).

il devrait diviser un terme u_k de la série de telle sorte que k soit un diviseur de A+ 1, c'est-à-dire de la forme 2^n et par suite θ serait un nombre premier égal à $2^n \pm 1$ et diviseur de $2^{117} - 1$, ce qui est impossible puisque 127 est premier. On peut vérifier par un calcul relativement rapide que A ne divise u_{n^2} que pour $n = 127$. Donc A est premier. On peut énoncer de même le théorème suivant, de beaucoup préférable dans l'application, à celui de WILSON, et qui a son analogue dans toutes les séries récurrentes :

Théorème général. — *Lorsque dans la série de Lamé, le terme de rang $p + 1$ est divisible par p, sans qu'aucun des termes dont le rang est un diviseur de $p + 1$ le soit, le nombre p est un nombre premier, et l'on a $p = 10q \pm 3$; de même, lorsque le terme de rang $p - 1$ est divisible par p, sans qu'aucun des termes dont le rang est un diviseur de $p - 1$ le soit, le nombre p est un nombre prernier, et l'on a $p = 10q \pm 1$.*

Je vais indiquer le procédé de calcul qui repose sur le système de numération binaire ; mais auparavant il est indispensable d'exposer quelques unes des propriétés nombreuses, et intéressantes à divers égards, de la série récurrente donnée par la relation

$$v_n = \frac{u_{2n}}{u_n}$$

§ 15.

On a d'abord

$$v_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n ,$$

Cette série des v_n est aussi donnée par la loi de récurrence

$$v_{n+1} = v_n + v_{n-1} ,$$

avec les conditions initiales

$$v_0 = 2 , \qquad v_1 = 1$$

et l'on a

$$v_{-n} = (-1)^n v_n ;$$

de sorte que la série ne contient plus aucun terme égal à zéro. On a encore la relation

$$v_n^2 - v_{n-1}v_{n+1} = (-1)^n.5 ,$$

de laquelle il résulte que v_{2n} est un diviseur de la forme quadratique $x^2 - 5y^2$, et v_{2n+1} est un diviseur de la forme quadratique $x^2 + 5y^2$. On a donc les deux théorèmes suivants :

THEOREME. — *Lorsque n désigne un nombre pair, les diviseurs* *de* $\frac{u_{2n}}{u_n}$ *sont diviseurs de la forme quadratique* $x^2 - 5y^2$.

Les diviseurs linéaires impairs correspondants, sont de l'une des formes

$$20q + 1 , \quad +9 , \quad +11 , \quad +19 .$$

THEOREME. — *Lorsque* n *désigne un nombre impair, les diviseurs de* $\frac{u_{2n}}{u_n}$ *sont diviseurs de la forme quadratique* $x^2 + 5y^2$.

Les diviseurs linéaires impairs correspondants sont de l'une des formes

$$20q + 1 , \quad +3 , \quad +7 , \quad +9 .$$

On a les relations suivantes entre la série des v_n et la série de Lamé

$$v_n = u_{n+1} + u_{n-1} .$$
$$v_n^2 - 5u_n^2 = (-1)^n 4 .$$

Cette dernière relation prouve que u_n et v_n ne peuvent avoir d'autre commun diviseur que 12 ; mais nous appellerons particulièrement l'attention sur les deux formules suivantes

$$v_{4n+2} = v_{2n+1}^2 + 2 ,$$
$$v_{4n} = v_{2n}^2 - 2 ;$$

nous ajouterons que toutes ces formules se vérifient aisément par induction, en faisant voir que, si elles sont vraies pour une certaine valeur de n , elles le sont encore, pour une valeur de n supérieure d'une unité. On peut aussi les déduire toutes de la première formule de ce paragraphe.

§ 16.

La dernière des formules précédentes permet de calculer rapidement les termes de rang $2^n k$ dans la série de Lamé, connaissant le terme de rang k . On a ainsi par exemple

$$u_4 = u_2 (v_1^2 - 2) = u_2 \times 3 ,$$
$$u_8 = u_4 (v_2^2 - 2) = u_4 \times 7 ,$$
$$u_{16} = u_8 (v_4^2 - 2) = u_8 \times 47 ,$$
$$u_{32} = u_{16} (v_8^2 - 2) = u_{16} \times 2207 ,$$
$$u_{64} = u_{32} (v_{16}^2 - 2) = u_{32} \times 48\ 70847 ,$$
$$u_{128} = u_{64} (v_{32}^2 - 2) = u_{64} \times 2732\ 51504\ 97407 ,$$

. . . .

Le dernier nombre doit être, d'après le § 14 divisible par 127, si 127 est un nombre premier ; or ce nombre ne divise aucun des précédents et l'on a

$$2372\ 51504\ 97407 = 127 \times 18\ 68122\ 08641\ .$$

On démontre ainsi directement que 127 est premier *sans essayer la division par les nombres inférieurs*, c'est-à-dire *sans se servir de la table des nombres premiers.* Mais de cette façon le procédé est impraticable pour de grands nombres ; aussi doit-on remarquer que les essais consistent dans la division de tous les termes calculés par 127, et que par conséquent, il suffit d'avoir les résidus de ces nombres par rapport au module 127. Le tableau précédent se transforme alors, en tenant compte de cette observation, dans le suivant :

Tableau des résidus des v_{2^n} suivant le module 127.

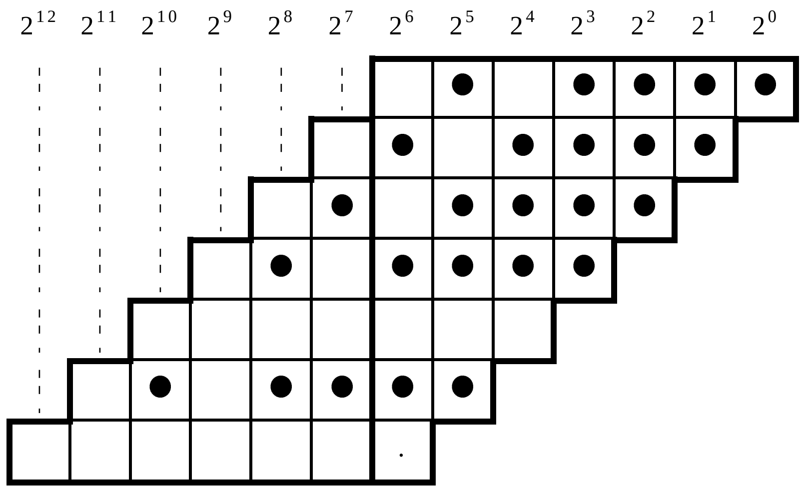
$$\begin{cases} v_4 \equiv 3^2 - 2 \equiv 7\ , \\ v_8 \equiv 7^2 - 2 \equiv 47\ , \\ v_{16} \equiv 47^2 - 2 \equiv 48\ , \\ v_{32} \equiv 48^2 - 2 \equiv 16\ , \\ v_{64} \equiv 16^2 - 2 \equiv 0\ . \end{cases}$$

On peut appliquer ce procédé pour démontrer, de la même manière, que les nombres $2^{31} - 1$ et $2^{127} - 1$ sont premiers. Mais, comme je l'ai dit plus haut, j'ai employé pour ce dernier nombre le système de la numération binaire, en opérant sur un échiquier de 127 cases de côté. J'indiquerai d'abord sur l'exemple précédent la méthode dont je me suis servi, en faisant remarquer toutefois que ce procédé de calcul a été employé, en partie du moins, par les mathématicietiens arabes[1], pour l'addition, mais non pour la division.

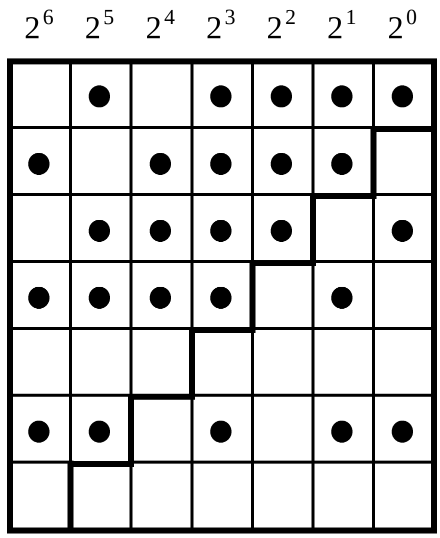
Nous remarquerons d'abord que la multiplication de deux nombres écrits dans le système binaire, c'est-à-dire, avec les deux chiffres 0 et 1 seulement, se fait par le simple déplacement longitudinal du multiplicande. D'autre part, il est clair que le reste de la division de 2^m par 2^n-1 est égal à 2^r, r désignant le reste de la division de m par n. Cela posé, nous prenons pour l'essai de $2^7 - 1$, un échiquier de sept cases de côté divisé en deux parties par une diagonale ; la multiplication de 47 par 47 se fera de 1a façon suivante, en remarquant que dans le système binaire, le nombre 47 s'écrit ainsi : 101111.

---

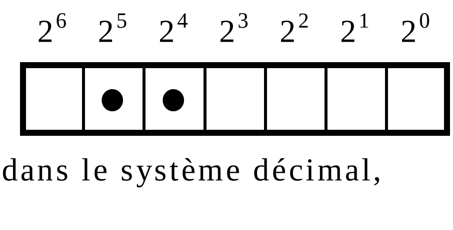
[1] ATTI DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE NUOVI LINCEI, ETC. TOMO XII. - ANNO XII. (1858-1859) ROMA, etc. 1859, page 429, lig. 20-27, 29-31, pages 430-431, page 432, lig. 1-18, SESSIONE V[a], DEL 3 APRILE 1859 e SESSIONE VII[a] DEL 5 GIUGNO 1859. — RECHERCHES SUR PLUSIEURS OUVRAGES DE LEONARD DE PISE, etc. PAR M. F. WOEPCKE, Membre correspondant de l'Academie de'Nuovi Lincei. *PREMIERE PARTIE, Extraits et traductions d'ouvrages arabes inédits.* II. Traduction du traité d'arithmétique d'Aboûl Haçan Ali Ben Mohammed Alkalçâdî. Extrait des *Atti dell'Accademia Pontificia de Nuovi Lincei.* Tomo XII, Sessione V, del 3 Aprile 1859, e Sessione VII. del 5 giugno 1859. ROME IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHEMATIQLUES ET PHYSIQUES, 1859, page 59, lig. 25-33, 35-37, pages 60-61, page 62, lig. 1-3. DE L'ADDITION A LA MANIERE DES CASES DE L'ECHIQUIER.



Nota. Les gros traits indiquent les bords des deux parties de l'échiquier. Des pions ayant été disposés ainsi que l'indique la figure précédente sur l'échiquier pour la multiplication, il faut faire l'addition, et la division par $2^7 - 1$; on commence alors, par placer l'échiquier dans la seconde position indiquée ci-après sans déranger les pions ; on a ainsi supprimé des multiples de $2^7 - 1$.



Il reste à faire l'addition par colonnes verticales ; pour cela après avoir retranché 2, ou un pion de la seconde colonne, comme l'indique la théorie, on enlève ensuite deux pions de chaque colonne pour en reporter un dans la colonne à gauche, et dans la première à droite, lorsqu'on arrive à la dernière. Avec un peu d'exercice, on parvient assez rapidement à exécuter cette manoeuvre. On trouve ainsi comme reste, dans, la première rangée



On a effectivement, dans le système décimal,

$$47^2 - 2 \equiv 2^5 + 2^4 \equiv 48 \,, \ (\text{Mod. } 127)$$

§ 17.

Nous avons dit plus haut que, conformément à une assertion de FERMAT, EULER avait démontré que le nombre

$$A = 2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$$

est, un nombre premier. Pour vérifier cette assertion, EULER a d'abord fait voir que le nombre 2A ou

$$2^{32} - 2 \,,$$

appartient à la forme quadratique $x^2 - 2y^2$, et qu'en conséquence, les diviseurs de A sont de l'une des deux formes linéaires

$$8\,q + 1 \qquad 8\,q + 7 \,.$$

D'autre part, EULER a démontré que les diviseurs premiers de $a^p - 1$ sont de la forme

$$2\,kp + 1$$

lorsque p désigne un nombre premier. En combinant les deux résultats précédents, on en conclut que les diviseurs de A sont de l'une des formes linéaires

$$248\,q + 1 \qquad 248\,q + 63 \,.$$

EULER a donc essayé, ainsi qu'il nous l'apprend, tous les nombres premiers contenus dans ces deux formes, et inférieurs à la racine carrée de A, c'est-à-dire inférieurs à 46340, il n'en a trouvé aucun qui fût diviseur de A[1].

La méthode que nous venons d'exposer pour la recherche des nombres premiers, est, sous des aspects bien divers, opposée à la méthode d'EULER. Dans cette dernière, les essais consistent dans des divisions du nombre dont on veut démontrer la non-décomposition en facteurs, par *des nombres toujours différents*, et c'est *l'insuccès* de ces essais qui conduit à affirmer que le nombre essayé est premier. Dans, notre méthode, au contraire, les divers essais consistent dans des divisions de nombres, d'un calcul facile, et indépendants de la construction préalable d'une table de nombres premiers, par un même diviseur, le nombre donné ; c'est le *succès* de cet essai qui donne l'affirmation que l'on cherche. Par conséquent cette méthode est pour ainsi dire, affranchie de l'incertitude de ces essais et de ces calculs numériques. Nous avons cru ajouter une preuve à l'appui de ce système, en donnant les calculs concernant le nombre $A = 2^{31} - 1$. Ces calculs, effectués fort rapidement, dans le système binaire, sont dus à l'un de mes élèves, et sont consignés dans les deux tableaux suivants :

---

[1] *NOUVEAUX MEMOIRES* DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LLETTRES. ANNEE M*DCCLXXII*, ETC. HISTOIRE, etc., page 35, lig. 15-26, page 36, lig. 1-23.

FIG. I.

	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
0	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	0
1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	1
2	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	2
3	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	3
4	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	4
5	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	5
6	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	6
7	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	7
8	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	8
9	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	9
10	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	10
11	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	11
12	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	12
13	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	13
14	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	14
15	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	15
16	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	16
17	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	16
18	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	18
19	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	19
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	20
21	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	21
22	■	□	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	22
23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	23
24	■	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	24
25	■	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	25
26	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	26
27	■	■	□	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	27
28	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	28
29	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	29
30	■	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	30
0	□	■	□	□	■	□	■	■	□	■	■	■	■	■	■	□	□	■	■	□	■	□	□	■	■	■	■	■	□	■	■	0
1	■	■	■	■	□	■	□	□	□	■	■	■	■	□	□	■	□	■	□	□	■	■	□	■	■	□	■	■	■	■	■	1
2	□	■	□	■	□	□	■	■	□	□	■	□	□	■	□	■	■	■	□	□	■	□	□	■	■	□	□	□	□	■	□	2
3	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	3
	■	□	□	■	□	□	■	■	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	□	□	□	□	■	□	□	■	■	■	□	■	

Calcul du résidu de $V_{2^{26}}$ suivant le module $2^{31}-1$, à l'aide du résidu de $V_{2^{25}}$ suivant le même module, dans le système de numération binaire, par M. Paul SOUVERAIN, élève du lycée de Moulins.

FIG. II.

	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
0	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	0
1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	1
2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	■	2
3	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□	■	■	■	■	3
4	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	■	□	□	■	■	■	■	■	4
5	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	■	□	■	□	□	■	□	■	□	□	■	□	■	□	■	■	■	■	■	■	5
6	■	■	■	□	□	□	■	□	□	■	□	■	□	■	■	□	□	□	■	□	■	□	■	■	□	■	□	□	■	■	□	6
7	□	■	■	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	□	■	■	□	□	■	□	□	□	□	■	□	■	■	■	□	□	7
8	□	□	■	□	■	□	□	□	■	□	■	□	□	■	□	□	□	□	□	■	■	■	□	■	□	□	□	■	■	■	□	8
9	□	□	□	□	■	■	■	□	□	□	□	□	■	□	■	■	□	■	□	■	■	■	■	■	■	■	□	■	□	□	■	9
10	□	□	■	□	■	■	□	□	■	□	■	■	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	■	■	□	□	□	■	■	□	■	10
11	■	■	□	□	□	□	□	□	■	□	■	■	■	□	□	■	□	■	□	□	□	■	■	■	■	□	□	□	□	■	■	11
12	□	■	□	□	■	□	■	□	■	■	■	□	■	□	■	□	□	□	■	■	■	■	■	□	□	■	■	■	□	□	□	12
13	■	□	□	□	■	■	■	■	■	■	■	□	■	□	□	■	□	■	■	■	■	□	■	□	■	■	■	□	■	□	■	13
14	■	□	□	□	□	□	■	■	□	■	■	□	□	□	■	□	■	□	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	□	□	□	14
15	□	■	■	□	■	□	■	□	■	■	□	■	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	□	■	□	■	□	□	■	□	■	15
16	□	■	□	■	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	□	■	■	□	□	□	□	■	■	■	□	□	■	■	□	■	■	16
17	□	■	□	□	■	■	■	■	■	□	□	■	■	■	□	■	□	■	□	■	■	■	□	□	□	□	■	□	□	□	□	16
18	□	□	□	□	■	□	□	□	■	■	■	■	□	■	■	□	□	□	□	□	□	□	□	■	■	□	□	■	□	□	■	18
19	□	□	□	■	□	□	■	□	■	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	□	■	□	□	□	□	□	□	■	■	■	■	19
20	□	□	■	■	■	□	■	■	■	■	■	■	□	□	□	□	□	■	■	■	■	□	□	■	■	■	□	■	□	□	■	20
21	■	■	□	□	□	■	□	■	■	■	■	□	□	■	□	□	■	■	□	■	□	□	■	□	□	□	■	□	■	□	□	21
22	■	■	■	□	□	□	■	□	■	■	□	■	■	■	□	□	■	■	□	□	■	□	■	■	□	□	□	■	□	■	□	22
23	□	■	□	□	□	■	■	□	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	■	□	□	□	■	■	■	□	□	□	□	■	23
24	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	□	□	■	□	□	■	■	□	■	□	□	■	□	□	■	□	□	■	■	■	24
25	■	□	□	■	■	■	■	□	■	□	□	■	■	■	□	□	□	■	■	□	■	■	■	□	■	■	□	■	■	□	■	25
26	■	□	□	■	□	□	■	■	□	□	□	■	■	■	□	■	■	□	□	□	□	□	□	■	□	□	■	■	■	□	■	26
27	■	■	■	□	□	■	■	□	■	□	■	■	■	□	■	□	■	□	■	□	□	■	■	□	□	■	□	■	■	■	□	27
28	■	□	□	□	■	■	□	□	■	■	□	■	■	□	□	■	■	□	■	□	□	□	■	■	■	□	□	□	■	□	□	28
29	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	29
30	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	30
	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	

Tableau des résidus des de V_{2^n} suivant le module $2^{31} - 1$, calculé dans le système de numération binaire, par M. Paul SOUVERAIN, élève du lycée de Moulins.

Ce tableau fait voir par la considération de la série découverte par LEONARD DE PISE, que le nombre $2^{31} - 1$ est un nombre premier, ainsi qu'EULER l'a affirmé.

Le premier tableau consiste dans le calcul du résidu de $v_{2^{26}}$ suivant le module A, déduit de celui de $2_{2^{25}}$, à l'aide de la formule

$$v_{4n} = v_{2n}^2 - 2 ,$$

que nous avons démontrée au § 15 ; le second tableau est le résumé des 30 opérations de ce genre, faites consécutivement. Chacune des lignes horizontales de ce second tableau représente respectivement les résidus de $v_{2^1}, v_{2^2}, v_{2^3}, \ldots, v_{2^{30}}$, suivant le module, écrits dans le système binaire ; les carrés noirs représentent les unités, et les carrés blancs représentent les zéros. L'avant-dernière ligne donne

$$v_{2^{29}} \equiv 2^{16}\ , \ \ (\text{Mod. } 2^{31} - 1),$$

et par suite, on a

$$v_{2^{30}} \equiv 2^{32} - 2 \equiv 0,\ \ (\text{Mod. } 2^{31} - 1).$$

Ainsi, le nombre essayé est premier.

§ 18.

La méthode que nous avons exposée s'applique encore, non-seulement aux nombres de la forme $2^n - 1$, mais à tous les nombres A choisis de telle sorte qu'il soit facile d'obtenir en facteurs premiers la décomposition du nombre $A + 1$ ou du nombre $A - 1$. Nous pensons d'ailleurs, pour faire comprendre l'utilité de nos recherches, devoir placer sous les yeux du lecteur le passage suivant, que nous empruntons à l'illustre GAUSS[1] :

> « 329. Problema, numeros primos a compositis dignoscendi, hosque in factores suos primos resoluendi, ad grauissima ac vtilissima totius arithmeticæ pertinere, et geometrarum tum veterum tum recentiorum industriam ac sagacitatem occupauisse, tam notum est, vt de hac re copiose loqui superfluum foret. Nihilominus fateri oportet, omnes methodos hucusque prolatas vel ad casus valde speciales restrictas esse, vel tam operosas et prolixas, vt iam pro numeris talibus, qui tabularum a viris meritis constructarum limites non excedunt, i. e. pro quibus methodi artificiales superuacuæ sunt, calculatoris etiam exercitati patientiam fatigent, ad maiores autem æplerumque vix applicari possint. Etsi vero illæ tabulæ, quæ in omnium manibus versantur, et quas subinde adhuc, viterius continuatum iri sperare licet, in plerisque casibus vulgo occurrentibus vtique sufficiant : tamen calculatori perito occasio haud raro se offert, e numerorum magnorum resolutione in factores magna emolumenta capiendi, quæ temporis dispendium mediocre largiter composent ; prætereaque scientiæ dignitas requirere videtur, vt omnia subsidia ad solutionem problematis tam elegantis ac celebris sedulo excolantur. Propter has rationes non dubitamus, quia duæ methodi sequentes, quarum efficaciam ac breuitatem longa experientia confirmare possumus, arithmeticæ amatoribus haud ingratæ sint futuræ. Ceterum in problematis natura fundatum est, vt methodi *quæcunque* continuo prolixiores euadant, quo maiores sont numeri ad quos applicantur ; attamen pro methodis sequentibus difficultates perlente increscunt, numerique e septem, octo vel adeo adhuc pluribus figuris constantes præsertim per secundam felici semper successu tractati fuerunt, omnique celeritate, quam pro tantis numeris exspectare æquum est, qui secundum omnes methodos

---

[1] DISQVISITIONES ARITHMETICÆ, AVCTORE D. CAROLO FRIDERICO GAVSS, etc., page 575, lig. 28-30, page 576, page 577, lig. 1-5. — CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE, ERSTER BANB, etc., page 401 , lig. 17-33, page 402 , lig. 1-9.

hactenus notas laborem, etiam calculatori indefatigabili intolerabilem, requirerent »[1].

Il est curieux d'observer, de près, le choix des nombres pris par GAUSS, comme exemples ; le premier est le nombre

$$314l59265 = 9 \times 5 \times 7 \times 997331$$

divisible immédiatement par 5, 7 et 9 ; le nombre à essayer est ainsi diminué de trois chiffres, et fait partie de toutes les tables de nombres premiers un peu étendues ; le second est immédiatement divisible par 8, et comporte seulement sept chiffres ; on a d'ailleurs

$$5428681 = 307 \times 17683\ ,$$

et rien ne prouve que GAUSS ait laissé le choix de ce nombre au hasard. L'essai de ces deux nombres serait assez rapide, à l'aide du calcul par logarithmes que j'ai indiqué ailleurs, ainsi que je l'ai dit plus haut.

Nous ajouterons enfin, qu'aucune des méthodes connues jusqu'à ce jour, ne permettrait pas de décider si le nombre $2^{127} - 1$, est premier ou composé.

LEGENDRE en 1830 disait que le plus grand nombre vérifié « premier » était

$$2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$$ [2]

---

[1] Dans la traduction française de POULLET-DELISLE ce passage est traduit ainsi (RECHERCHES ARITHMETIQUES, Par M. CH.-FR. GAUSS (de Brunswick) ; Traduites par A.-C.-M. POULLET-DELISLE,etc., page 416, lig. 4-37, page 417, lig. 1-2) :

> « 329. Le problème où l'on se propose de distinguer les nombres premiers des nombres composés et de décomposer ceux-ci en leurs facteurs premiers, est connu comme un des plus importans et des plus utiles de toute l'Aritmétique ; tout le monde sait qu'il a été l'objet des recherches des géometres tant anciens que modernes, et il serait inutile de donner des détails à cet égard. Cependant on ne peut s'empêcher de convenir que toutes les méthodes proposées jusqu'à présent sont restreintes à des cas très-particuliers, ou sont si longues et si pénibles, que même pour ceux de ces nombres qui ne dépassent pas les limites des Tables dont on est redevable à quelques mathématiciens, c'est-à-dire, pour les nombres à regard desquels ces méthodes sont inutiles, elles fatiguent la patience du calculateur le plus exercé, et qu'elles ne sont pour ainsi dire pas applicables à de plus grands nombres. Quoique ces Tables, qui sont dans les mains de tout le monde, et que l'on doit espérer devoir accroître encore par la suite, suffisent dans la plupart des cas qui se présentent ordinairement ; il n'est cependant pas rare qu'un calculateur habile tire de la décomposition des grands nombres en facteurs des avantages qui compensent au-delà l'emploi du temps. En outre la dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre. Aussi nous ne doutons pas que les deux méthodes suivantes, dont nous pouvons affirmer la brièveté et l'efficacité d'après une longue expérience, ne plaisent aux amateurs de l'Arithmétique. Au reste, il est dans la nature du problème, que les méthodes, *quelles quelles soient,* deviennent d'autant plus longues, que les nombres auxquels on les applique sont plus considérables ; cependant, pour les méthodes suivantes, les difficultés ne s'accroissent qu'avec beaucoup de lenteur, et les nombres de sept, de huit et même d'un plus grand nombre de chiffres, ont toujours été traités, surtout par la seconde, avec un succès très heureux, et avec toute la célérité que l'on pent attendre pour de si grands nombres, qui, suivant les méthodes connues jusqu'à présent, exigeraient un travail intolérable, même pour le calculateur le plus infatigable.

[2] THEORIE DES NOMBRES. Troisième EDITION. Par ADRIEN-MARIE LEGENDRE. Tome I. , etc. , page 229, lig. 14. — Voyez ci-dessus, page 26, note 3.

Le savant M. GENOCCHI dans un écrit présenté à l'Académie royale des Sciences de Turin fait remarquer qu'on connaît à présent d'autres nombres premiers plus grands[1]. Je ferai seulement observer, pour l'instant, que j'ai trouvé le plan d'un mécanisme qui permettra de décider presque instantanément si les assertions du Père MERSENNE et du Baron PLANA, rapportées dans cette Note, sur les nombres

$$2^{53}-1\,,\quad 2^{67}-1\,,\quad 2^{127}-1\,,\quad 2^{257}-1$$

qu'ils considéraient comme premiers, sont exactes.

Les théorèmes indiqués dans la théorie précédente s'appliquent à toutes les séries récurrentes déduites des fractions continues périodiques, de la résolution des équations quadratiques indéterminées, et notamment de l'équation de PELL. On peut ainsi présenter d'une façon

---

[1] On lit en effet dans cet écrit de M. GENOCCHI (ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. PUBBLICATI DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI. VOLUME UNDECIMO. 1875-76. STAMPERIA REALE DI TORINO DI G. B. PARAVIA. E C., page 826, lig. 26-32, page 827, lig. 1-29, DISP. 5[a] *Aprile* 1876). — INTORNO A TRE PROBLEMI ARITMETICI DI PIETRO FERMAT, NOTA DI A. GENOCCHI, STAMPERTA REALE DI TORINO, DI G. B. PARAVIA E COMP. 1876 (In 8.° de 20 pages, dans la seconde desquelles on lit : « Estr. dagli *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. XI. Adunanza del 2 Aprile 1876 »), pag. 18, lig. 16-32 ; page 19, lig. 1-22) :

> « Il signor E. LUCAS, prima nel giornale *Nouvelles Annales de Mathématiques (2[e] serie,* tom. XIV, anno 1875, pag. 525), e poscia nei *Comptes rendus* (tom. 82, N° 2, 10 gennaio 1876, pag. 167) , ha ripetuta l'affermazione di LEGENDRE che « le plus grand nombre premier connu actuellement » è $2^{31}-1=2147483647$,
> numero verificato come prime da EULERO. Ciò era bensi vero al tempo di LEGENDRE, ma da parecchi anni si conosceva un numero primo maggiore, poichè il Barone PLANA trovò essere un numero primo il quoziente $\dfrac{3^{29}+1}{4.6091}=2816876431,$
> *(Mémoire sur la Théorie des nombres,* del 20 novembre 1859 ; *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino,* serie 2[a], tom. XX, pag. 139, Torino, 1863). PLANA indicava anche (ivi, pag. 140 e 141) i seguenti due numeri, l'uno di 12 e l'altro di 16 cifre, ch'egli sospettava esser primni : $\dfrac{3^{29}-1}{2.59}=581613361499,$
> $$2^{53}-1=9007199254740991,$$
> dopo aver riconosciuto che l'uno non ha divisori primi inferiori a 52259 e l'altro non ha divisori primi inferiori a 50033.
>
> Il signor LUCAS ha troyato essere un numero primo il quoziente
> $$\frac{2^{40}+1}{2^{8}+1}=4278255361,$$
> e dubitava fosse tale anche $\dfrac{2^{41}+1}{3.83}=8831418697,$
> pel quale aveva sperimentato tutti divisori primi inferiori a 60000 *(Nouv. Ann.* loc. cit.).
> Egli crede inoltre di poter affermare, che è primo il numero $2^{127}-1$, il quale avrebbe 39 cifre *(Comptes rendus* loc. cit.).
> Noto a questo proposito che da un passo delle opere del P. MERSEMME, riferito nel tomo II *dei Novi Commentarii* di Pietroburgo, pag. 78, si trarrebbe ch'esso MERSEMME considerava come primi i numeri $2^{67}-1$, $2^{127}-1$, $2^{257}-1$, l'ultime dei quali si comporrebbe di 78 cifre.
> Nello stesso tomo, pag. 76, il numero $2^{41}-1$ è indicato come primo *dubbio :* il Barone PLANA ha trovato che è divisibile per 13367 (Accad. di Torino, tom. XX citato, pag. 130). »

plus homogène, et plus lumineuse, un très-grand nombre de résultats de la théorie des résidus quadratiques, combler quelques lacunes signalées par GAUSS, dans cette théorie, et principalement dans la Section IV des *Disquisitiones Arithmeticæ*[1].

§ 19.

Avant de terminer ce chapitre sur les séries récurrentes, nous croyons bon de revenir sur quelques unes de formules que nous avons exposées, dans les paragraphes précédents. Nous ferons d'abord remarquer l'analogie des relations (4), et (5) du §2, avec la formule fondamentale de la théorie des combinaisons,

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} ,$$

qui représente, aussi, la loi de formation du triangle arithmétique. On l'obtient, comme on sait, en partageant les combinaisons de m lettres n à n, en deux groupes distincts ; le premier groupe renfermant les combinaisons qui ne contiennent pas une certaine lettre ; et le second, les combinaisons qui la contiennent. Cette formule peut s'écrire *symboliquement*

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1}\left(C^1 + 1\right)^1 ,$$

en considérant *les indices supérieurs comme des exposants*. On trouverait une formule analogue en partageant les combinaisons C_m^n en divers groupes, par la considération de deux lettres, et ainsi

$$C_m^n = C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2} ,$$

ou, symboliquement, comme ci-dessus

$$C_m^n = C_{m-2}^{n-2}\left(C^1 + 1\right)^2 ,$$

On peut, par induction, arriver à la formule générale

(A) $$C_m^n = C_{m-p}^{n-p}\left(C^1 + 1\right)^p .$$

Pour démontrer cette formule, supposons la vérifiée pour une certaine valeur de p, et pour des valeurs quelconques de m et de n, ainsi que cella a lieu, d'après ce qui précède, pour $p = 1$ et $p = 2$. On obtient, en changeant dans cette dernière formule, m en $m - 1$, et dans la formule obtenue ainsi, n en $n - 1$, les relations

$$C_{m-1}^n = C_{m-p-1}^{n-p}\left(C^1 + 1\right)^p ,$$
$$C_{m-1}^{n-1} = C_{m-p-1}^{n-p-1}\left(C^1 + 1\right)^p ;$$

[1] DISQVISITIONES ARITHMETICÆ, AVCTORE D. CAROLO FRIDERICO GAUSS, etc., pages 92-164. — CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE, ERSTER BAND, etc. pages 73-119. — RECHERCHES ARITHMETIQUES, PAR M. CH.-FR.-GAUSS, etc., pages. 69-117.

donc, en ajoutant, et en tenant compte de la relation fondamentale,

$$\mathrm{C}_m^n = \mathrm{C}_{m-p-1}^{n-p-1}\left(\mathrm{C}^1+1\right)^p\left(\mathrm{C}^1+1\right)^1 ,$$

on a enfin

$$\mathrm{C}_m^n = \mathrm{C}_{m-p-1}^{n-p-1}\left(\mathrm{C}^1+1\right)^{p+1} .$$

La relation (A), est donc vérifiée pour la valeur de p augmentée d'une unité, et ainsi de suite ; par conséquent, elle est générale. Cette formule s'applique encore pour les valeurs négatives de m et de n, si l'on remarque que le triangle arithmétique de PASCAL, qui donne, comme l'on sait, le tableau des coefficients des diverses puissances du binôme (1 + x), peut aussi être construit, à l'aide de la loi de formation, pour les valeurs négatives de l'exposant. On peut en juger, par le tableau ci-dessous :

EXPOSANTS	COEFFICIENTS							
. . . . .	.	.	.	.	.	.	.	.
. . . . .	.	.	.	.	.	.	.	.
$\bar{5}$	1,	$\bar{5}$,	15,	$\overline{35}$,	70,	$\overline{126}$,	210,	$\overline{330}$,
$\bar{4}$	1,	$\bar{4}$,	10,	$\overline{20}$,	35,	$\overline{56}$,	84,	$\overline{120}$,
$\bar{3}$	1,	$\bar{3}$,	6,	$\overline{10}$,	15,	$\overline{21}$,	28,	$\overline{36}$,
$\bar{2}$	1,	$\bar{2}$,	3,	$\bar{4}$,	5,	$\bar{6}$,	7,	$\bar{8}$,
$\bar{1}$	1,	$\bar{1}$,	1,	$\bar{1}$,	1,	$\bar{1}$,	1,	$\bar{1}$,
0	1,	"	"	"	"	"	"	"
1	1,	1,	"	"	"	"	"	"
2	1,	2,	1,	"	"	"	"	"
3	1,	3,	3,	1,	"	"	"	"
4	1,	4,	6,	4,	1,	"	"	"
5	1,	5,	10,	10,	5,	"	"	"
. . . . . .	.	.	.	.	.	.	.	.
. . . . . .	.	.	.	.	.	.	.	.

REMARQUE, — Le tableau des coefficients donnerait continuellement des zéros, si l'on construisait ce tableau à gauche de la colonne verticale des unités.

La formule (A) ne diffère, que par la forme, de la formule de VANDERMONDE, connue sous le nom de *binôme des factorielles* ; mais la démonstration précédente nous paraît plus simple que celle qu'on en donne habituellement. Cette formule, que l'on peut écrire comme il suit,

$$\mathrm{C}_{p+q}^{p+n} = \mathrm{C}_p^0\mathrm{C}_q^n + \mathrm{C}_p^1\mathrm{C}_q^{n+1} + \ldots\ldots + \mathrm{C}_p^p\mathrm{C}_q^{n+p} ,$$

donne la somme des produits obtenus en multipliant respectivement tous les termes, d'une ligne horizontale du triangle arithmétique, par ceux de la même ligne, ou d'une autre, commencée à un terme de rang quelconque ; et, en particulier, la somme des carrés des coefficients d'une puissance quelconque du binôme. On supposera $C_p^0 = 1$ et $C_p^{-n} = 0$.

§ 20.

La formule fondamentale de la théorie des combinaisons peut encore s'écrire symboliquement

$$C_{m-1}^{n-1} = C_{m-1}^{n}(C_1 - 1)_1 ,$$

en traitant les *indices inférieurs comme des exposants*, tandis que, dans le paragraphe précédent, il s'agissait des indices supérieurs. On a, de même, par induction, la formule générale

$$\text{(B)} \qquad C_{m-p}^{n-p} = C_{m-p}^{n}(C_1 - 1)_p .$$

On démontre cette formule comme la précédente (A). Supposons, en effet, la formule (B) vérifiée pour certaines valeurs $p=1$, $p=2$, ... , et pour des valeurs quelconques, mais entières, de m et de n ; on obtient, en changeant dans cette dernière formule m en $m - 1$,

$$C_{m-p-1}^{n-p} = C_{m-p-1}^{n}(C_1 - 1)_p \ ;$$

en retranchant membre à membre de la précédente,

$$C_{m-p-1}^{n-p}(C_1 - 1)_1 = C_{m-p-1}^{n}(C_1 - 1)_p(C_1 - 1)_1 ,$$

et, à cause de la relation fondamentale,

$$C_{m-p-1}^{n-p-1} = C_{m-p-1}^{n}(C_1 - 1)_{p+1} .$$

La formule (B) peut être écrite, par le développement, ainsi qu'il suit

$$C_{m-p}^{n-p} = C_p^0 C_m^n - C_p^1 C_{m-1}^n + C_p^2 C_{m-2}^n + \dots + (-1)^p C_p^p C_{m-p}^n \ ;$$

elle donne la somme des produits obterius en multipliant $p + 1$ termes consécutifs d'une colonne du triangle arithmétique, respectivement par les $p + 1$ coefficients du développement de la puissance $(1-x)^p$. On a, en particulier, la proposition suivante :

THEOREME. — *Si l'on multiplie $p + 1$ termes consécutifs de la p^{ieme} colonne du triangle arithmétique de Pascal, respectivement par les termes de la p^{ieme} ligne, pris alternativement avec les signes $+$ et $-$ la somme des produits est nulle.*

§ 21.

Les formules (A) et (B) sont entièrement analogues aux formules

(4) et (5) du §2 ; ces formules peuvent être généralisées. Si l'on a une série récurrente donnée par l'échelle de relation,

$$u_{n+1} = \mathrm{A}u_n + \mathrm{B}u_{n-1} ,$$

on aura encore là formule symbolique

$$u^{n+p} = u^{n-p} (\mathrm{A}u + \mathrm{B})^p ;$$

correspondante de la formule (A) ; on obtiendra, de même, une formule analogue à la formule (B). On retrouvera, d'ailleurs, les différents termes de cette série dans le tableau généralisé du triangle arithmétique.

On peut aisément trouver un *nombre indéfiniment grand* de formules analogues aux formules symboliques que nous avons indiquées plus haut. On a, par exemple, dans la série de LAME, ou dans la série généralisée

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} ;$$

si l'on change dans cette formule n en $n + 1$, et si l'on ajoute le résultat obtenu au précédent, on obtient

(C) $$u_{n+2} = 2u_n + u_{n-1} ,$$

si l'on opère sur cette formule comme sur la précédente, et ainsi de suite indéfiniment, on forme le tableau des formules

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2u_n + 1u_{n-1} ,\\
u_{n+3} &= 2u_n + 3u_{n-1} + 1u_{n-2} ,\\
u_{n+4} &= 2u_n + 5u_{n-1} + 4u_{n-2} + 1u_{n-3} ,\\
u_{n+5} &= 2u_n + 7u_{n-1} + 9u_{n-2} + 5u_{n-3} + 1u_{n-4} ,\\
u_{n+6} &= 2u_n + 9u_{n-1} + 16u_{n-2} + 14u_{n-3} + 6u_{n-4} + 1u_{n-5},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On reconnaît dans ce tableau que les coefficients des termes u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, . . . s'obtiennent par une loi de formation analogue à celle du triangle arithmétique ; on retrouve encore la série de LAME, dans ce tableau, en opérant comme dans le tableau donné dans le § 5. On remarque encore que l'on peut obtenir le tableau précédent en formant, par colonnes, les sommes de deux lignes consécutives du triangle arithmétique. On a donc en général, la formule

$$u_{n+p} = 2u_n + \left(\mathrm{C}^1_{p-1} + \mathrm{C}^1_{p-2}\right)u_{n-1} + \left(\mathrm{C}^2_{p-1} + \mathrm{C}^2_{p-2}\right)u_{n-2} + \left(\mathrm{C}^3_{p-1} + \mathrm{C}^3_{p-2}\right)u_{n-3} + \ldots$$

ou, sous la forme symbolique,

$$u^{n+p} = u^{n-p+1} (u + 1)^{p-1} + u^{n-p+2} (u + 1)^{p-2} ,$$

ou, encore,

(D) $$u^{n+p} = u^{n-p+1} (u + 1)^{p-2} (2u + 1) ,$$

Cette formule peut se déduire de la formule (C) que nous avons donnée plus haut, de la manière suivante. Remplaçons, en effet, dans cette dernière, p par $p - 1$ et par $p - 2$, et ajoutons les deux résultats obtenus, nous retrouverons la formule (C).

On a encore la formule

$$u_{n-2} = 2u_n - u_{n-1} \,,$$

de laquelle on déduit une formule analogue à la formule (C), et que l'on peut obtenir directement à l'aide de cette formule, par le changement de u en $-u$.

Ces formules peuvent elles-mêmes être développées indéfiniment ; soit par exemple, la relation immédiate

$$u_{n+2} = 3u_n - u_{n-2} \,,$$

ou, symboliquement

$$u^{n+2} = u^{n-2} \left(3\, u^2 - 1 \right) ;$$

on en déduit, en changeant n en $n + 2$, en multipliant les deux membres du résultat par 3, et en retranchant le précédent

$$u^{n+6} = u^{n-2} \left(3\, u^2 - 1 \right)^2 ;$$

en opérant ensuite sur cette formule, on a

$$u^{n+10} = u^{n-2} \left[3\, u^2 - 1 \right]^3 ;$$

on obtient, de même, la formule générale

$$u^{n+4p} = u^n \left[3\, u^2 - 1 \right]^p ;$$

§ 22.

Plus généralement encore, on a la formule

$$u_{n+k} = v_k\, u_n - (-1)^{\mathrm{k}}\, u_{n-k} \,,$$

que l'on peut écrire symboliquement,

$$u^{n+k} = u^{n-k} \left[v_k\, u^{\mathrm{k}} - (-1)^k \right] ,$$

et dans laquelle v_k, est un terme constant, égal au terme de rang k dans la série

$$1 \,,\; 3 \,,\; 4 \,,\; 7 \,,\; 11,\; 18 \,,\; 29 \,,\; .\; .\; .\; ,$$

déjà considérée. Si nous remplaçons, dans la formule précédente, n par $n + k$, si nous multiplions par v_k, les deux membres du résultat obtenu, et si nous ajoutons les deux membres de la formule, précédente, respectivement multipliés par $-(-1)^k$, nous obtenons

$$u^{n+3k} = u^{n-k} \left[v_k\, u^{\mathrm{k}} - (-1)^k \right]^2 ,$$

ou, en changeant u_n en u_{n+k}

$$u^{n+4k} = u^n \left[v_k\, u^{\mathrm{k}} - (-1)^k \right]^2 ;$$

on obtient de même la formule générale

$$\text{(D)} \qquad u^{n+4kp} = u^n \left[v_k\, u^{\mathrm{k}} - (-1)^k \right]^p .$$

La première formule de ce paragraphe peut s'écrire encore,

$$(-1)^k\, u_{n-k} = u^n \left(v_k - u^k \right) ,$$

et donne aussi la formule

$$\text{(E)} \qquad (-1)^{kp}\, u_{n-kp} = u^n \left(v_k - u^k \right)^{\mathrm{p}} ,$$

Nous n'avons considéré dans ce paragraphe, et dans les précédents que les relations linéaires entre trois termes de la série de LAME généralisée; mais il est facile de voir que l'on peut encore appliquer la méthode pour une relation linéaire quelconque ; on peut aussi employer cette méthode pour la généralisation des formules contenant aussi les carrés, les cubes, etc. .... des termes de cette série, comme plusieurs des formules (8), et même ceux d'une série récurrente générale.

Considérons, en effet, une série récurrente quelconque, donnée par la relation

$$U_{n+k} = A_0\, U_{n+p} + A_1\, U_{n+p-1} + \ldots + A_{p-1}\, U_{n+1} + A_p\, U_n\,,$$

quelle que soit la valeur de n. Posons, pour abréger,

$$\varphi(u) = A_0\, u^p + A_1\, u^{p-1} + \;.\;.\;.\; + A_{p-1}\, u + A_p\,;$$

nous dirons que les symboles

$$U^k \quad \text{et} \quad \varphi(U)$$

sont symboliquement équivalents ; nous allons faire voir que l'on peut, dans les équations algébriques, les remplacer l'un par l'autre. En effet, changeons successivement dans la relation donnée n en $n + 1$, $n + 2$, $n + p$; ajoutons les résultats obtenus, après les avoir respectivement multipliés par

$$A_p\,,\; A_{p-1}\,,\; .\;.\;.\;.\;, A_1\,,\; A_0\,,$$

nous obtenons l'égalité symbolique

$$U_{n+2k} = U^n[\varphi(U)]^2\,,$$

nous obtiendrons, de même, la formule générale

$$U_{n+kp} = U^n[\varphi(U)]^p\,.$$

Par conséquent, si les symboles considérés sont équivalents, il en est de même de leurs puissances entières ; par suite, aussi de ces puissances multipliées par un même facteur. On démontrera encore que si les symboles U^{k_1} et $\varphi_1(U)$, U^{k_2} et $\varphi_2(U)$, ... , sont respectivement équivalents, il en sera aussi de même, de leurs sommes, de leurs puissances, de leurs produits respectifs ; et, en général, de leurs fonctions entières semblables. On peut donc énoncer le théorème général suivant

THEOREME. — *Si les fonctions $f_1(U)$, $f_2(U)$, . . . $f_n(U)$, et $\varphi_1(U)$, $\varphi_2(U)$, . . ., $\varphi_n(U)$, sont symboliquement équivalentes deux à deux, il en est de même de toute fonction entière composée de la même manière avec ces deux séries de quantités, et ainsi, on a l'équivalence symbolique*

$$\Psi(f_1\,,\; f_2\,,\; .\;.\;.\;.\; f_n) \equiv \Psi(\varphi_1\,,\; \varphi_2\,,\; .\;.\;.\;.\; \varphi_n)$$

§ 23.

Nous donnons, dans le texte, le tableau de la décomposition en facteurs premiers, des différents termes de la série récurrente de LEONARD DE PISE, obtenue à l'aide des théories précédentes.

TABLEAU DES FACTEURS PREMIERS DE LA SERIE RECURENTE DE LEONARD DE PISE

n	u_n	Div. impropres	Div. propres	n	u_n	Diviseurs impropres	Diviseurs propres
1	1	—	1.	31	13 46269	—	557 × 2417.
2	1	—	1.	32	21 78309	3 × 7 × 47.	2207.
3	2	—	2.	33	35 24578	2 × 89.	19801.
4	3	—	3.	34	57 02887	1597.	3571.
5	5	—	5.	35	92 27465	5 × 13.	1 41961.
6	8	2^3.	—	36	149 30352	$2^4 \times 3^3 \times 17 \times 19$.	107.
7	13	—	13.	37	241 57817	—	73 × 149 × 2221.
8	21	3.	7.	38	390 88169	37 × 113.	9349.
9	34	2.	17.	39	632 45986	2 × 233.	1 35721.
10	55	5.	11.	40	1023 34155	3 × 5 × 7 × 11 × 41.	2161.
11	89	—	89.	41	1655 80141	—	2789 × 59369.
12	144	$2^4 \times 3^2$	—	42	2679 14296	$2^3 \times 13 \times 29 \times 421$.	211.
13	233	—	233.	43	4334 94437	—	4334 94437.
14	377	13.	29.	44	7014 08733	3 × 89 × 199.	43 × 307.
15	610	2 × 5.	61.	45	11349 03170	2 × 5 × 17 × 61.	1 09441.
16	987	3 × 7.	47.	46	18363 11903	28657.	139 × 461.
17	1597	—	1597.	47	29712 15073	—	29712 15073.
18	2584	$2^3 \times 17$.	19.	48	48075 26976	$2^6 \times 3^2 \times 7 \times 23 \times 47$.	1103.
19	4181	—	37 × 113.	49	77787 42049	13.	97 × 61 68709.
20	6765	3 × 5 × 11.	41.	50	1 25862 69025	$5^2 \times 11 \times 3001$.	101 × 151.
21	10946	2 × 13.	421.	51	2 03650 11074	2 × 1597.	63 76021
22	17711	89.	199.	52	3 29512 80099	3 × 233 × 521.	90481.
23	28657	—	28657.	53	5 33162 91173	—	953 × 559 45741.
24	46368	$2^4 \times 3^2 \times 7$.	23.	54	8 62675 71272	$2^3 \times 17 \times 19 \times 53 \times 109$.	5779.
25	75025	5^2.	3001.	55	13 95838 62445	5 × 89.	661 × 4 74541.
26	1 21393	233.	521.	56	22 58514 33717	$3 \times 7^2 \times 13 \times 29 \times 281$.	14503.
27	1 96418	2 × 17.	53 × 109.	57	36 54352 96162	2 × 37 × 113.	43 71901.
28	3 17811	3 × 13 × 29.	281.	58	59 12867 29879	5 14229.	59 × 19489.
29	5 14229	—	5 14229.	59	95 67220 26041	—	353 × 27102 60697.
30	8 32040	$2^3 \times 5 \times 11 \times 61$.	31.	60	154 80087 55920	$2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11 \times 31 \times 41 \times 61$.	2521.

Nous avons trouvé, depuis la composition de ce chapitre, un grand nombre d'autres résultats nouveaux, mais nous indiquerons seulement le suivant, que l'on déduit immédiatement de la théorie des sections angulaires

THEOREME — *Dans la série de Fibonacci, le quotient de* $4u_{pn}$ *par* u_n *est de la forme quadratique* $X^2 - pY^2$ *, si* p *désigne un nombre premier de la forme 4 q + 1 ; ce quotient est de la forme quadratique* $5X^2 + pY^2$ *, lorsque* p *désigne un nombre premier de la forme* $4q + 3$.

On a ainsi les formules suivantes, qu'il est facile d'appliquer encore au quotient de $4v_{pn}$. par v_n :

$$4\frac{u_{5n}}{u_n} = \left[2v_{2n} + (-1)^n\right]^2 - 5,$$

$$4\frac{u_{7n}}{u_n} = 5\left[2u_{3n} + (-1)^n u_n\right]^2 + 7v_n^2,$$

$$4\frac{u_{11n}}{u_n} = 5\left[2u_{5n} + (-1)^n u_{3n} - 2u_n\right]^2 + 11v_{3n}^2,$$

$$4\frac{u_{13n}}{u_n} = \left[2v_{6n} + (-1)^n v_{4n} + 4v_{2n} - (-1)^n\right]^2 - 13\left[v_{4n} + 1\right]^2,$$

$$4\frac{u_{17n}}{u_n} = \left[2v_{8n} + (-1)^n v_{6n} + 5v_{4n} + 7(-1)^n v_{2n} + 4\right]^2 - 17\left[v_{6n} + (-1)^n v_{4n} + v_{2n} + 2(-1)^n\right]^2,$$

$$4\frac{u_{19n}}{u_n} = 5\left[2u_{9n} + (-1)^n u_{7n} - 4u_{5n} + 3(-1)^n u_{3n} + 5u_n\right]^2 + 19\left[v_{7n} - v_{3n} + (-1)^n v_n\right]^2,$$

$$4\frac{u_{23n}}{u_n} = 5\left[2u_{11n} + (-1)^n u_{9n} - 5u_{7n} - 8(-1)^n u_{5n} - 7u_{3n} - 4(-1)^n u_n\right]^2 + 23\left[v_{9n} + (-1)^n v_{7n} - (-1)^n v_{3n} - 2v_n\right]^2,$$

$$4\frac{u_{29n}}{u_n} = \left[2v_{14n} + (-1)^n v_{12n} + 8v_{10n} - 3(-1)^n v_{8n} + v_{6n} - 2(-1)^n v_{4n} + 3v_{2n} + 9(-1)^n\right]^2$$

$$- 29\left[v_{12n} + v_{8n} - (-1)^n v_{6n} + (-1)^n v_{2n} + 1\right]^2,$$

. . . .

CHAPITRE II .

SUR LES NOMBRES CONGRUENTS ET SUR LEUR MULTIPLICATION.

§ 1.

Le problème des nombres congruents comporte un certain nombre de questions fondamentales de l'analyse des équations indéterminées biquadratiques, dont on ignore encore aujourd'hui la solution générale, malgré les nombreux et importants travaux entrepris sur ce sujet par les mathématiciens les plus habiles. Il occupe une place importante dans le célèbre *Traite des Carrés* de LEONARD DE PISE, que l'on a cru perdu pendant bien longtemps, et qui a été retrouvé et publié, comme chacun le sait, par le docte et généreux prince B. BONCOMPAGNI.

Le problème dont il s'agit revient à la résolution en nombres rationnels du système des équations simultanées

$$x^2 + a = u^2\ , \qquad x^2 - a = v^2\ ;$$

c'est ainsi qu'il fut d'abord considéré par DIOPHANTE ; mais nous devons ajouter toutefois que dans ces équations, DIOPHANTE suppose les quatre nombres x, a, u, v indéterminés en même temps. Sous cette forme le problème paraît fort difficile, et cela tient à la trop grande indétermination du système, puisque le nombre des inconnues rationnelles surpasse de deux unités le nombre des conditions qui leur sont imposées. Il semble même que l'on n'ait pas tenu compte, jusqu'à présent, de ce que l'on peut appeler l'ordre de l'indétermination dans cette partie de l'analyse ; c'est-à-dire de l'excès du nombre des inconnues rationnelles sur le nombre des équations qui les contiennent. Ainsi les deux problèmes de trouver les triangles rectangles, et les trièdres trirectangles, dont les côtés sont entiers, n'appartiennent pas au même ordre d'indétermination, puisque le premier conduit à la résolution d'une seule équation contenant deux inconnues rationnelles, et que le second conduit à la résolution d'un système de trois équations contenant cinq inconnues ; ce dernier problème est beaucoup plus difficile que le précédent, et n'a point encore été résolu complètement. Cette observation s'applique encore à la théorie des nombres congruents, et c'est probablement pour en diminuer la difficulté que les mathématiciens arabes ont commencé par dresser le tableau des valeurs que peut prendre le nombre a qui est à proprement parler le *nombre congruent,* et que l'on suppose débarassé de tous les facteurs multiples qu'il contient. On trouve, en effet, des tables de cette nature, dans un traité sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, par ABOU DJA'FAR MOHAMED BEN ALHOÇAÏN[1], dans chacune des deux éditions faites en 1494 et en 1593 de la « Summa de Arithmetica » de Frère LUCA PACIOLI[2]), et dans le premier volume pu-

---

[1] ATTI DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI, etc. TOMO XIV. - ANNO XIV. (1860-61.) ROMA, 1861, ecc. page 267, colonne 10ème, page 259, lig. 1-40. — RECHERCHES SUR PLUSIEURS OUVRAGES DE LEONARD DE PISE, etc. PAR M. F. WOEPCKE, etc. PREMIERE PARTIE. *Extraits et traductions d'ouvrages arabes inédits.* III. Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le même sujet par Aboû Dja'far Mohammed Ben Alhoçaïn, etc. 1861, page 33, colonne 10ème, page 27, lig. 30-38.

[2] Sũma de Arithmetica Geometria Proportioni & Proportionalita (In fol. de 308 feuillets, dans le 308e desquels, numéroté 76, recto (lig. 11-15) on lit : « Con spesa e diligentia. E opifitio del prudente homo Paganino de Paganini da Brescia. Nella excelsa cita de vinegla cõ grã del suo excelso Dominio che per anni .x. proximi nullaltro in quello la possi restãpare ne altroue stãpata in quello portarla sotto pena in ditta gratia cõtenuta. Negliãni de nostra Salute. M.CCCC.lxliiij. adi .10. de nouēbre »), feuillet 54ème, numéroté 46, *verso,* marge latérale extérieure. — Summa de Arithmetica geometria. Proportioni : et proportionallita : Nouamente impressa In Toscolano su la riua dil Benacense et vnico carpionista Laco : ecc. (In fol., di 308 feuillets, dans le 308e desquels, numéroté 76, *recto* (lig. 22-25) on lit : « Et per esso paganino di nouo impressa. In Tusculano sula riua dil laco Benacense : nel proprio luoco et Sito : doue gia esser solea la nobile cita ditta Benaco. Regnante il Sercuissimo principe. D. D. Andrea Gritti Inclito duce di Uenecia. Finita adi .11. Decembre 1523 »), feuillet 54ème,

blié en 1797 d'un savant ouvrage du PERE COSSALI, sur l'histoire de l'Algèbre[1].

Les nombres congruents non supérieurs à 10 sont seulement les nombres 5, 6, et 7. LEONARD DE PISE, a en effet, énoncé tout d'abord, que l'unité ou un carré ne peut-être un nombre congruent. D'autre part, l'aire d'un triangle rectangle dont les côtés sont formés par les nombres r et s, a pour expression

$$a = rs\ (r^2 - s^2)\ ,$$

et représente un nombre congruent, puisque l'on a :

$$\left(\frac{r^2+s^2}{2}\right)^2 \pm rs(r^2-s^2) = \left(\frac{r^2 \pm 2rs - s^2}{2}\right)^2 .$$

Bernard FRENICLE DE BESSY, mort en 1675[2] dans son traité des Triangles rectangles, démontre que l'aire d'un triangle rectangle ne saurait être égale à un carré (ce qui ne diffère pas du théorème de FIBONACCI), ni à son double[3] ; la première partie de cette proposition a été démontrée par FERMAT[4].

---

numéroté 46, *verso,* marge latérale extérieure.

[1] ORIGINE, TRANSPORTO IN ITALIA, PRIMI PROGRESSI IN ESSA DELL'ALGEBRA, *STORIA CRITICA* DI NUOVE DISQUISIZIONI ANALITICHE E METAFISICHE ARRICHITA DI D. PIETRO COSSALI C. R. *VOLUME 1.* DALLA REALE TIPOGRAFIA PARMENSE M.DCC.XCVII, pag. 126.

[2] LE GRAND DICTIONNAIRE HISTORIQUE, etc. Par M[re]. LOUIS MORERI, ecc. *NOUVELLE EDITION, ecc. TOME CINQUIEME.* A PARIS, etc. M.D.CC.LIX, page 370, col. 1, lig. 5-41.

[3] TRAITE DES TRIANGLES RECTANGLES *EN NOMBRES, DAVS LEQVEL PLVSIEVRS belles propriétés de ces Triangles sont démontrées par de nouveaux principes.* Par Monsieur FRENICLE de l'Académie Royale des Sciences. A PARIS, Chez ESTIENNE MICHALLET, rue Saint Jacques, à l'Image S. Paul, proche la Fontaine S. Severin. M.DC.LXXVI. *Avec Permission* (in 8°, de 118 pages, dont les l[e]-2[e] ne sont pas numérotées, et les 3[e]-118[e] sont numérotées 1-116), page 100, lig. 17-24, pages, 101-106, PROPOSITION XXXIX, PROPOSITION XL. — « TRAITE DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES, *DANS LEQUEL PLUSIEURS BELLES PROPRIETEZ de ces Triangles sont démontrées par de nouveaux principes.* Par, M. FRENICLE » (RECUEIL DE PLUSIEURS TRAITEZ, DE MATHEMATIQUE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES. A PARIS, DE L'IMPRIMIRIE ROYALE. M.DC.LXXVI, grand in folio, de 244 pages, et 12 planches), page 25, lig. 5-43, page 26, lig. 1-15, PROPOSITION XXXIX, PROPOSITION XL. — MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES. Depuis 1666, jusqu'à 1699. Tome V. A PARIS, PAR LA COMPAGNIE DES LIBRAIRES. MDCCXXIX. *AVEC PRIVILEGE DU ROY,* page 133, lig. 20-30, pages 134-135, page 136, lig 1-8. — RESOLUTIONS DES QUATRE PRINCIPAUX PROBLEMES D'ARCHITECTURE, PAR M. BLONDEL ET OUVRAGES DE MATHEMATIQUE DE M. FRENICLE. *A LA HAYE,* Chez P. GOSSE & I. NEAULME, M.DCC.XXXI, page 313[ème], numérotée 133, lig. 20-30, pages 314[ème]-315[ème], numérotées 134-l35, page 316[ème], numérotée 136. — DICTIONNAIRE DES SCIENCES MATHEMATIQUES PURES, ET APPLIQUEES, PAR UNE SOCIETE D'ANCIENS ELEVES DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE, SOUS LA DIRECTION DE A.-S. DE MONTFERRIER, etc. TOME SECOND. A PARIS, A. J. DENAIN, LIBRAIRE, etc. 19 MARS 1836, page 48, col. 2, lig. 29-33. — DICTIONNAIRE DES SCIENCES MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES, PAR A.-S. DE MONTFERRIER, etc. DEUXIEME EDITION, TOME SECOND, A PARIS, etc. 1845, page 48, col. 2, lig. 29-33. — DIZIONARIO DELLE SCIENZIA MATEMATICHE PURE ED APPLICATE, COMPILATO, etc. SOTTO LA DIREZIONI DI A.-S. DE MONTFERRIER, etc. PRIMA VERSIONE ITALIANA, CON NUMEROSE AGGIUNTE E CORREZIONI DEL D. GIUSEPPE GASBARRI E DI GIUSEPPE FRANCOIS. VOLUME QUINTO, FIRENZE, PER V. BATELLI E COMPAGNI, 1843, page 202, lig. 21-26.

[4] DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS, LIBER UNUS. *CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de* FERMAT *Senatori Tolosani,* Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex variis eiusdem D. de FERMAT Epistolis. TOLOSÆ, etc. M.DC.LXX, page 338, lig. 46-48, page lig. 1-22, LIBER VI, QVÆSTIO XXVI. PROBLEMA XX,

Le savant M.r GENOCCHI, dans un excellent commentaire des ouvrages de LEONARD de PISE, a démontré qu'un nombre premier de la forme $8n + 3$, tel que 3, 11, 19, 43, ne peut être un nombre congruent[1]. Dans le même ouvrage, M.r GENOCCHI a aussi démontré que le nombre 10 n'est pas congruent[2], c'est-à-dire qu'il est impossi-

---

OBSERVATIO D. P. F. - MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES, INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES DE TOULOUSE. Quatrième Série. TOME III. TOULOUSE, etc. 1853, page 127, lig. 11-33, page 128, lig. 1-16. — PRECIS DES ŒUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT ET DE L'ARITHMETIQUE DE DIOPHANTE ; PAR E. BRASSINNE, etc. PARIS, etc. 1853, page 127, lig. 11-33, page 128, lig. 1-16.

[1] On lit en effet dans ce travail de M. Genocchi (ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE. COMPILATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. *TOMO SESTO*, etc. page 316, lig. 11-24, 28-33, AGOSTO 1855. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO. etc. *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI, etc.. page 104, lig. 11-24, 28-33) :

> « Del quale principie desumeremo, che nessuna delle formule
> $x^4 + 4y^4,\ x^4 + y^4,\ x^4 + 25y^4,\ x^4 + 4n^2y^4, x^4 - y^4, \pm(x^4 - 4y^4), \pm(x^4 - 100y^4), \pm(x^4 - n^2y^4)$,
> può mai rappresentare un quadrato *2, se n denoti un numero primo della forma 8m+3, perchè altrimenti si avrebbe un triangolo rettangolo, la cui area avrebbe una delle forme $(xy)^2, 2\left(\frac{xy}{2}\right)^2, 10\left(\frac{xy}{2}\right)^2, n\left(\frac{xy}{2}\right)^2$, ovvero in cui l'accennato prodotto avrebbe le forme equivalenti $(xy)^2$, $2(xy)^2$, $10(xy)^2$, $n(xy)^2$, e quindi si avrebbe un congruo quadrato, oppure eguale a due, dieci, o n volte un quadrato.
>
> *2 La dimostrazione che ha indicata Legendre relativamente alla formula $x^4 - y^4$ *(Théorie des nombres,* n° 325, T. II, pag. 4, *Corollaire)* sembra applicarsi aloso caso di x impari et y pari, e non comprender quindi il caso di x e y impari entrambi. È anche imperfetta quella che si 1egge nel giornale, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Tom. V, pag. 73-74. »

[2] ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, etc. *TOMO SESTO*, etc., page 299-300, page 301, lig. 1-5. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. *NOTE ANALITICHE, etc.* , page 87-88, page 89, lig. 1-5. — M. le Professeur Mathieu Collins de Dublin avait démontré aussi cette proposition dans un opuscule intitulé « A TRACT ON THE POSSIBLE AND IMPOSSIBLE CASES OF QUADRATIC DUPLICATE EQUALITIES IN THE DIOPHANTINE ANALYSIS : TO WHICH IS ADDED A SHORT, BUT COMPREHENSIVE APPENDIX, IN WHICH MOST OF THE USEFUL AND IMPORTANT Propositions in the *Theory of Numbers* are very concisely demonstrated. BY MATTHEW COLLINS, B. A. Senior Moderator in Mathematics and Physics, and Bishop Law's Mathematical. Prizeman, Trin. Coll. Dublin. DUBLIN : This Tract and Mr. Collins' other works, can be procured direct from the Author, 4 Ormonde road, Kilkenny, or. 13 Anglesea street, Dublin. They are sold by MESSRS. PONSONBY. CORNISH, KELLY, ROONEY, and MORRIS of DUBLIN : MULCAHY, CORK : O'GORMAN, LIMERICK ; DOUGLAS and NICHOLSON, KILKENNY. 1858 [*Price Four Shillings*.] » (In 8.° de 62 pages, dont les 1ère-3ème ne sont pas numérotées, et les 6ème-61ème sont numérotées 2-60), page 9, lig. 7-49. Dans cet opuscule, dont D. B. Boncompagni possède un exemplaire(*), cette proposition est énoncée ainsi (A TRACT, etc. BY MATTHEW COLLINS, etc., page 9, lig. 7-8) :

> « 12. The twe simultaneons équations $\begin{array}{l} x^2 + 10\,y^2 = \Box = z^2 \\ x^2 - 10\,y^2 = \Box = w^2 \end{array}$ are impossible ».

(*) Questo esemplare mi fu gentilrnente inviato in dono nel dicembre del 1876 dal Ch.mo Sig. Giorgio Salmon, professore di matematiche nella R. Università di Dublino.)

M. Genocchi a donné en 1865 un théorème plus général, c'est-à-dire que le double d'un nombre premier de la forme 8m + 5 ne peut pas être congruent (IL CIMENTO RIVISTI DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. ANNO III. - SERIE 3a. VOLUME VI. TORINO. TIP. SCOLASTICA DI SEBASTIANO FRANCO E FIGLI E COMP. 1855, page 677, pag 3-20, FASCICOLO VIII. — STORIA DELL'ALGEBRA DEI CONGRUI DI LEONARDO PISANO. Per ANGELO GENOCCI, *Estratto dal* CIMENTO, Vol. VI.- *Fasc.* VIII. TORINO. TIP. SCOLISTICA DI SEBASTIANO FRANCO E FIGLI E. COMP. 1855, page 10, lig. 8-20. — COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME SOIXANTE DIX HUITIEME. JANVIER-JUIN 1874. PARIS, etc. 1874, page 433, lig. 17-31, N° 6. SEANCE DU LUNDI 9 FEVRIER 1874. — INSTITUT NATIONAL DE FRANCE. ACADEMIE DES SCIENCES, Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome LXXVIII séance du lundi 9 février 1874. — *Sur l'impossibilité de quelques égalités doubles.* Par M. A. GENOCCHI. In 4.°, de trois pages, dans la dernière desquelles on lit :

ble de résoudre le problème énoncé ainsi par BEHA-EDDIN, dans son traité de calcul *(Khelasat ab Hisáb)*[1] :

> « Si l'on ajoute 10 à un carré, alors la somme doit avoir une racine carrée, et si 1'on en retranche 10 , le reste doit de même avoir une racine carrée ».[2]

« ROMA. - TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, Via Lata N° 211 A », page 1, lig. 7-19). En 1874 il a donné aussi d'autres théorèmes très-importants sur les nombres congruents (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, PUBLIES, etc. TOME SOIXANTE-DIX-HUITIEME. JANVIER-JUIN 1874, etc., page 433, lig. 1-34, pages 434-435. — INSTITUT NATIONAL DE FRANCE. ACADEMIE DES SCIENCES. Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome, LXXVII, etc., page 1, lig. 7-35, pages 2-3).

[1] KHOLACAT AL HISSAB, OU QUINTESSENCE DU CALCUL PAR BEHA-EDDIN AL AAMOULI, TRADUIT ET ANNOTE PAR ARISTIDE MARRE, Professeur, Officier de I'Instruction publique. *DEUXIEME EDITION*, revue, corrigée, et augmentée de nouvelles, notes. ROME, IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES, 1864, page 50, lig. 28-30. — NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES. JOURNAL, etc. Redigé par MM. TERQUEM, etc. ET GERONO, etc. TOME CINQUIEME, PARIS, etc. 1846, page 313, lig. 1-3, JUIN 1846. — KHELASAT AL HISAB *(Essence du Calcul)* DE BEHA-EDDIN MOHAMMED, PAR ARISTIDE MARRE, (In 8°, de 64 pages, dans la 64ème desquelles on lit : « Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Juin 1846, publiées chez Carilian-Gœry et Vor Dalmont, à Paris », et une table), page 53î, lig. 1-3.

[2] Dans la traduction, de M. Nesselmann du « Khelasat al Hisáb » on lit (Essenz der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhossain aus Amul, arabisch und deutsch herausgegeben, von DR. G. H. F. NESSELMANN, ausserordentlichem Professor an der Universität zu Königsberg. Berlin. Bei G. Reimer. 1843. Akademische Buchdruckerei, page 55, lig. 27-29) :

> « Wenn man zu einem Quadrat 10 addirt, so soll die Summe eine Wurzel haben, und wenn man 10 davon subtahirt, so soll der Rest eine Wurzel haben ».

Beha-eddin Mohammed ben Alhossain al-Aamouli né à Bâlbec en 1547 entre le 22 janvier et le 19 février du style julien (Essenz der Rechenkunst, ecc., page 74, lig. 2-14), mourut en 1622 entre le 8 août et le 5 septembre du style Grégorien (Essenz der Rechenhkunst, etc., page 74, lig., 2-15).

Dans le traité ci-dessus mentionné de BEHA EDDIN on lit (KHOLAÇAT AL HISSAB, *etc. DEUXIEME EDITION*, etc., page 50, lig. 2-23. — NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES, etc. TOME CINQUIEME, etc., page 312, lig,. 6-27, — KHELAÇAT AL HISSAB, etc. PAR ARISTIDE MARRE, page 52, lig., 6-27. — Essenz der Rechenkust, etc., page 53, lig. 2-20).

> « Les savants qui sont forts dans cette doctrine, ont rencontré certains problèmes, dont la résolution a fixé leurs méditations, et dont la recherche a attiré leurs regards ; ils ont entrepris par toutes sortes d'artifices de soulever le voile, et ont tenté par tous les moyens d'arracher le rideau ; mais ils n'ont pu découvrir aucun chemin, ni trouver personne pour leur indiquer la route, personne pour les conduire. Depuis les temps anciens ces problèmes sont demeurés comme insolubles, se montrant rebelles contre tous les génies jusqu'à cette époque. Les savants compétents en ont mentionné quelques-uns dans leurs écrits, et en ont proposé une partie dans leurs recueils, pour prouver que cette science contient des difficultés capables de rebuter, pour réduire au silence ceux-là qui prétendent qu'en matière de calcul il en est absolument rien qu'ils ne puissent effectuer, pour prevenir les calculateurs de ne pas prendre la peine de chercher la solution, si quelques questions de ce genre leur étaient proposées, et pour exciter a les résoudre et à les devoiler ceux qui sont doués de brillantes facultés. Aussi je produis dans ce manuel sept de ces problèmes comme modèle, afin de suivre les vestiges de ces hommes d'élite et de marcher sur leurs, traces. Ce sont les suivants : »

BEHA-EDDIN rapporte ensuite les énoncés de ces sept problèmes (KHOLAÇAT AL HISSAB, etc. *DEUXIEME EDITION*, etc., page 50, lig. 24-30, page 51, lig. l3. — NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES, etc. TOME CINQUIEME, etc., page 312, lig, 28-31, page 313, lig. 1-16, KHELASAT AL HISAB, etc. PAR ARISTIDE MARRE, page 52, lig. 28-31, page 53, lig. 1-16. — Essenz der Rechenkust, etc., page 55, lig. 23-32, page 56, lig. 1-12) dont le second est le même qui est rapporté ci-dessus (ligne 3-5 de cette page).

§ 2.

On trouve encore dans ce traité de calcul, l'équation indéterminée

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad [1],$$

qui constitue la proposition négative de FERMAT, et dont l'impossibilité fut démontrée pour la première fois par EULER. C'est un cas particulier de l'équation plus générale

$$(1) \qquad x^3 + y^3 = \mathrm{A}\, z^3\ ;$$

dont on ignore la résolution, même dans les cas les plus simples. FERMAT a indiqué un procédé qui permet d'obtenir une série indéfinie de solutions nouvelles, à l'aide d'une première. On déduit de ce procédé les formules

$$(2) \qquad \mathrm{X} = x(2y^3 + x^3)\ , \quad \mathrm{Y} = -\,y(2x^3 + y^3)\ , \quad \mathrm{Z} = z(x^3 - y^3)\ ,$$

que l'on attribue habituellement à EULER, bien qu'elles soient fort antérieures[2]. CAUCHY a généralisé ces formules, en considérant l'équation

$$(3) \qquad \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}y^3 + \mathrm{C}z^3 + \mathrm{K}xyz = 0 \quad [3].$$

Les résultats obtenus par CAUCHY peuvent être énoncés sous la forme suivante, qui me paraît nouvelle :

I. — Si (x, y, z) , désignent des nombres entiers satisfaisant à l'équation (3) on obtient une nouvelle solution (x_1, y_1, z_1) à l'aide des formules

$$\frac{x_1}{x} + \frac{y_1}{y} + \frac{z_1}{z} = 0\ , \qquad \mathrm{A}x_1x^2 + \mathrm{B}y_1y^2 + \mathrm{C}z_1z^2 = 0.$$

II. — Si $(x, y\ z)$, et (x_1, y_1, z_1), désignent deux solutions distinctes de l'équation (3), on obtient une solution nouvelle (X, Y, Z) à l'aide des formules

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X}, & \mathrm{Y}, & \mathrm{Z}, \\ x, & y, & z, \\ x_{1,} & y_{1,} & z_{1,} \end{vmatrix} = 0, \quad \mathrm{AX}xx_1 + \mathrm{BY}yy_1 + \mathrm{CZ}zz_1 = 0\ .$$

Mais si l'on applique ces formules, dans les cas les plus simples, on n'obtient pas ainsi toutes les solutions.

Pour la résolution de l'équation (1), l'emploi des formules suivantes me semble préférable :

---

[1] KHOLACAT AL HISSAB , etc. DEUXIEME EDITION., etc. , page 51, lig. 4-5. — NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES. etc. TOME CINQUIEME, etc, page 313, lig. 7-8. — KHELASAT AL HISSAB, ou *Essence du calcul* DE BEHA-EDDIN MOHAMMED PAR ARISTIDE MARRE, etc., page 53, lig. 7-8. — Essenz der Rechenkunst, etc, page 56, lig. 1-2.

[2] NOUVEAUX ELEMENS DE MATHEMATIQVES, etc. SECOND VOLUME, etc. *Par JEAN PRESTET Prêtre, ci-devant Professeur des Mathématiques dans les Vniversitez d'Angers & de Nantes.* A PARIS, Chez ANDRE PRALARD, ruë saint-JACQUES. à l'occasion M.DC.LXXXIX. *AVEC PRIVILEGE DU ROY,* page 260, lig. 28-32, page 261, lig. 1-11.

[3] EXERCICES DE MATHEMATIQUES, PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, etc. A PARIS, etc. 1826, page 256, lig. 18-21, pages 257-260.

$$X = x^9 - y^9 + 3x^3y^3(2x^3+y^3)\ , \qquad Y = y^9 - x^9 + 3x^3y^3(2y^3 + x^3)\ ,$$
$$Z = 3\,xyz\,(x^6 - x^3y^3 + y^6)\ .$$

En supposant A= 9 , on trouve ainsi la solution

$$x=919\ , \quad y = -\,271\ , \quad z = 438\ ,$$

et, en général, toutes les solutions dans lesquelles z est un nombre pair. Ces solutions n'ont point été données par PRESTET, EULER et LEGENDRE, qui se sont occupés spécialement de cette équation.

En supposant encore A = 7 , on trouve aussi la solution

$$x = 73\ , \quad y = -\,17\ , \quad z = 38\ ,$$

et toutes les solutions dans lesquelles z est un nombre pair. FERMAT qui avait particulièrement étudié cette équation n'a point donné ces solutions ; cela semble indiquer qu'il n'était point en possession de la méthode générale.

La solution donnée ci-dessus $73^3 - 17^3 = 7 \times 38^3$ est plus simple que celle de FERMAT $1265^3 - 1256^3 = 7 \times 833$ [1] reproduite par LEGENDRE[2].

Quant aux formules de CAUCHY, elles donnent lieu à une conséquence curieuse. On a, en effet, l'identité

$$A[x\,(Ax^3 + 2By^3)]^3 + B[y\,(By^3 + 2Ax^3)]^2 + A^2B^2[3x^2y^2]^3$$
$$= [A^2x^6 + 7ABx^3y^3 + By^6]^2,$$

qui donne ainsi une série indéfinie de solutions de l'équation

$$AX^3 + BY^3 + A^2B^2Z^3 = U^2.$$

Cette identité donne, en particulier, celle que M. CATALAN a déduite de l'équation de la *toroïde*[3].

---

[1] Dans une note de FERMAT relative à une question de Bachet de Méziriac on lit (DIOPHANTI ALEXANDRINI, ARITHMETICORVM, LIBRI SEX, etc., page 135, lig. 12-17) :

> « Vt autem pateat quæstionis tertiæ determinationem non esse legitimam. datis duobus cubis 8. & 1. inueniendi alij dito quorum differentia æquet defferentiam datorum. Sanè Bachetus impossibilem hanc quæstionem pronuntiaret, cubi tanem duo per nostram methodum inuenti sunt sequentes quorum nempe differentia æquatur 7. differentiæ 8. & 1. cubi autem illi duo, sunt $\frac{2024284625}{6128487}$ & $\frac{1981385216}{6128487}$. latera ipsorum $\frac{1265}{183}$. & $\frac{1256}{183}$. »

M. Brassinne traduit ce passage ainsi (MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES, INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES DE TOULOUSE. Quatrième Série. TOME III, etc. , page 71, lig. 3-10. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT ET DE L'ARITHMETIQUE DE DIOPHANTE, PAR E. BRASSINNE, etc., page 71, lig. 3-10) :

> « Mais pour qu'il soit évident que la détermination de la troisième question n' est pas legitime : étant données deux cubes 8 et 1 , il faut en trouver deux autres dont la différence égale la différence des cubes donnés ; certainement Bachet affirmerait que cette question est impossible ; cependant les deux cubes trouvés par notre méthodes dont la différence égale 7 ou 8 – 1 , sont les suivants $\frac{2024284625}{6128487}$ & $\frac{1981385216}{6128487}$. »

[2] THEORIE DES NOMBRES, TROISIEME EDITION. PAR ADRIEN-MARIE LEGENDRE. TOME II. PARIS, CHEZ FIRMIN DIDOT FRERES, LIBRAIRES, RUE JACOB, n° 24. 1830, page 118, lig. 4-25, page 119, lig 1-5.

[3] NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHEMATIQUE, PUBLIEE PAR EUGENE CATALAN, etc. ET PAUL MANSION, etc. TOME PREMIER. MONS, HECTOR MANCEAUX, IMPRIMEUR-EDITEUR, Rue des Fripiers, 4 ;

§ 3.

Nous ne nous occuperons que de la seconde partie de la théorie des nombres congruents, c'est-à-dire, en remplaçant, dans le système fondamental, les inconnues rationnelles par des inconnues entières, que de la résolution des équations

(1) $$x^2 - ay^2 = u^2 , \qquad x^2 + ay^2 = v^2 ,$$

dans les cas particuliers de $a = 5$ et de $a = 6$, en faisant remarquer que les solutions données jusqu'ici sont incomplètes. La résolution de ce système revient à trouver, ainsi qu'on disait autrefois, les carrés *congrus* au nombre *congruent* a , et revient aussi à la résolution de l'équation biquadratique

$$x^4 - a^2y^4 = z^2.$$

Si aucune des inconnues n'est divisible par 5 , on déduit par le théorème de Fermat, la congruence

$$1 - a^2 \equiv \pm 1 \qquad (\text{mod. } 5),$$

et par suite, puisque $a^2 - 2$ n'est jamais divisible par 5 ,

$$a \equiv 0 \pm 1 \qquad (\text{mod. } 5) ;$$

Si le second membre de l'équation précédente est divisible par 5 , on arrive au même résultat ; si a est divisible par 5 , on déduit encore du système proposé le même résultat. On a donc ce théorème :

Tout nombre terminé par 2, 3, 7 ou 8 ne peut être congruent, si les carrés congrus doivent être des nombres entiers.

C'est pour cette raison que dans les tables des mathématiciens arabes, on ne trouve aucun nombre congruent terminé par l'un des chiffres cités ci-dessus.

Par suite, si l'on a, dans le système (1)

$$a \equiv \pm 2 \qquad (\text{mod. } 5) ,$$

il en résulte que l'inconnue y est nécessairement un multiple de 5.

L'arithmétique supérieure ne donne aucune méthode complète pour la résolution des équations biquadratiques. Cependant FERMAT a indiqué le moyen de trouver des valeurs rationnelles de x et y en nombre indéfini, satisfaisant à l'équation

$$\mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^3 + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E} = y^2 ,$$

dans l'un des trois cas suivants :

1° Lorsque le coefficient A est égal à un carré parfait ;

2° Lorsque le coefficient E est égal à un carré parfait ;

3° Lorsque l'on connaît une première solution de l'équation pro-

Grand'Rue, 7. 1875, page 132, lig. 25-36, note (2), QUATRIEME LIVRAISON. – Mai 1872.

posée[1].

On déduit de ce procédé que si x, y, z désignent trois nombres entiers satisfaisant à l'équation

$$x^4 + ax^2y^2 + by^4 = z^2 ,$$

on obtient une nouvelle solution (X, Y, Z) , et par suite une série indéfinie de solutions nouvelles à l'aide des formules

$$X = x^4 - by^4 , \qquad Y = 2\, xyz , \qquad Z = z^4 - (a^2 - 4b)x^4y^4 .$$

Les formules précédentes, que l'on doit à LEBESGUE[2], s'appliquent évidemment au cas particulier de l'équation fondamentale

$$x^4 - a^2y^4 = z^2 ,$$

déduite de la théorie des nombres congruents. Ces formules s'obtiennent immédiatement par le procédé de FERMAT, bien que LEBESGUE assure les avoir trouvées par une voie différente[3].

§ 4.

FERMAT a donné encore un procédé remarquable pour démontrer l'impossibilité de certaines équations indéterminées. Cette méthode consiste à exprimer les indéterminées des équations proposées, en fonctions entières d'indéterminées plus petites, qui doivent elles-mêmes satisfaire à des équations de même forme que les équations proposées, et comme on peut raisonner de même sur cette seconde solution, et que d'ailleurs il y a une limite à la décroissance des nombres entiers, on en conclut avec certitude l'impossibilité de l'existence d'une première solution. C'est ainsi que FERMAT a démontré que la différence de deux nombres bicarrés ne peut jamais être égale à un carré parfait ; ou, en d'autres termes, qu'un nombre carré ne peut être un nombre congruent[4].

---

[1] DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORUM LIBRI SEX, etc. DOCTRINÆ ANALYTICÆ INVENTVM. Collectum à *R. P. Jacobo de Billy S. J. Sacerdote ex varijs Epistolis quas ad eum diversis temporibus* misit *D. P. de Fermat, Senator Tolosanus,* page 30, lig. 1-2. — THEORIE DES NOMBRES. TROISIEME EDITION. Par ADRIEN-MARIE LEGENDRE. TOME II, PARIS, etc. 1830, pages 123-124, page 125, lig. 1-4.

[2] JOURNAL DE MATHEMATIQUES, etc. OU RECUEIL, etc. Publié PAR JOSEPH LIOUVILLE, etc. TOME XVIII. – ANNEE 1853, PARIS, MALLET BACHELIER, etc. 1863, page 84, lig. 21-26, MARS 1853.

[3] JOURNAL DE MATHEMATIQUES, etc. OU RECUEIL, etc. Publié PAR JOSEPH LIOUVILLE, etc. TOME XVIII. - ANNEE 1853, etc., page 84, lig, 21-26, pages 86-86.

[4] DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORUM LIBRI SEX, etc. , page 338, lig. 46-48, page 339, lig. 1-22. — MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES, etc. DE TOULOUSE. Quatrième Série. TOME III, etc., page 127, lig., 11-33, page 128, lig. 1-16. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT, etc. PAR E BRASSINNE, etc., page 127, lig. 11-33, page 128, lig. 1-16 — THEORIE DES NOMBRES. TROISIEME EDITION. PAR ADRIEN-MAIRIE LEGENDRE. TOME II, etc., pages 1-3, page 4, lig. 1-25. — *NOUVEAUX MEMEOIRES* DE L'ACADEMIE DES SCIENCES ET BELLES LETTRES. *ANNEE MDCCLXXVII.* AVEC L'HISTOIRE POUR LA MEME ANNEE. *A BERLIN,* Imprimé chez GEORGE JACQUES DECKER, Imprimeur du Roi. MDCCLXXIX, page 140, lig. 5-22. — OEUVRES DE LAGRANGE, PUBLIEES PAR LES SOINS DE M. J.-A. SERRET, etc. TOME QUATRIEME. PARIS, GAUTHIER-VILLARS, etc. MDCCCLXIX, page 377, lig. 6-21, page 378, lig. 1-2. — ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, etc. *TOMO*

Nous ferons cependant observer que M. GENOCCHI attribue le principe même de cette démonstration, à CAMPANUS DE NOVARE mathématicien du siècle de LEONARD DE PISE[1]

Cette méthode de démonstration, que FERMAT considérait comme une de ses découvertes les plus importantes, et les plus difficiles est, d'après LAGRANGE, une des plus fécondes de la théorie des nombres[2], et surtout dans celle des nombres entiers. Elle a été développée, et appliquée par EULER[3], LEJENDRE[4], LEJEUNE-DIRICHLET[5], LEBESGUE[6], à la démonstration de l'impossibilité d'un certain nombre d'équations indéterminées du troisième, du quatrième et du cinquième degré. Je me propose de faire voir que cette méthode peut s'appliquer, non-seulement à la démonstration de l'impossibilité de certaines équations indéterminées, mais peut aussi servir à la résolution de ces équations lorsque celles-ci sont possibles. Cette méthode avait été appliquée seulement, je pense, à la résolution complète des équations biquadratiques

---

SESTO, etc., page 305, lig. 16-32, page 306, lig. 1-13. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. *NOTE ANALITICHE.* etc., page 93, lig. 16-32, page 94, lig. 1-13.

[1] Dans le travail de M[r] Genocchi intitulé « SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. *NOTE ANALITICHE* » ece. on lit en effet (ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE COMPILATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. *TOMO SESTO,* etc., page 306, lig. 14-17, 32-34.— SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. *NOTE ANALITICHE*, *etc.* lig. 14-17, 32-34).

> « Ma o m'inganno a partito, o questo metodo quale appunto è descritto da Legendre fu applicato anche da un geometra italiano del secolo stesso in cui visse Leonardo Fibonacci, dal novarese Campano, primo cornmentator d'Euclide *[2].
>
> *[2] V. Tiraboschi, *Storia della letteratura italiana*, tom. IV, Lib. II, Cap. II. Il commento del Campano fu stampato per la prima volta a Venizia nel 1482. »

M. Genocchi rapporte ensuite quelques passages du commentaire de Campanus de Novare sur les éléments d'Euclide qui prouvent que ce géomètre avait fait une application très-remarquable de ce principe (ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, etc. *TOMO SESTO*, etc., page 306, lig. 17-22, page 307 , page 308, lig. 1-15, 22. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO , etc. *NOTE ANALITICHE*, etc., page 94, lig. 17-22, page 95, page 96, lig. 1-15, 22.

[2] *NOUVEAUX MEMOIRES* DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES. *ANNEE MDCCLXXVII*, etc. page 140, lig. 23-25. — OEUVRES DE LAGRANGE, etc. TOME QUATRIEME, etc., page 378, lig. 3-5.

[3] Vollständige Anleitung zur Algebra von Hrn. Leonhard Euler. Zweyter Theil von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytic. St. Petersburg gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 1770, page 418, lig. 9-19, pages 419-437, page 438, lig. 1-5. — *ELEMENS* D'ALGEBRE *PAR M. LEONARD EULER*, etc. TOME SECOND. etc. *A LION* , etc. MDCCLXXIV, etc., page 262, page 263, lig. 1-9. — *NOUVEAUX MEMOIRES* DE L' ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES LETTRES. *ANNEE MDCCLXXVII*, etc. , page 140, lig. 25 , page 141, lig. 1-7. — OEUVRES DE LAGRANGE, etc. TOME QUATRIEME, etc., page 378, lig. 5-12.

[4] THEORIE DES NOMBRES. TROISIEME EDITION. PAR ADRIEN-MARIE LEGENDRE. TOME II, etc., pages 1-12.

[5] « Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré. (Par Mr. *Lejeune Dirichlet,* professeur en mathématiques.) Lu à l'académie royale des sciences (institut de France), le 11. Juillet 1825, par l'auteur » (Journal für dïe reine und angewandte Mathematik, etc. Dritter Band, etc. 1828, pages 354-475, 4 Heft).

[6] « RESOLUTION DES EQUATIONS BIQUADRATIQUES (1) (2) $z^2 = x^4 \pm 2^m y^4$, (3) $z^2 = 2^m x^4 - y^4$, (4) (5) $2^m z^2 = x^4 \pm y^4$; PAR M. LEBESGUE. Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux » (JOURNAL DE MATHEMATIQUES. etc. OU RECUEIL, etc. Publié PAR JOSEPH LIOUVILLE etc. TOME XVIII. ANNEE 1853, pages 73-86.

$$x^4 - 2y^4 = \pm z \,, \qquad x^4 + 8y^4 = z^2,$$

donnée par LAGRANGE et LEBESGUE[1]. Je prendrai, pour exemples, quelques unes des équations de la théorie des nombres congruents.

§ 5.

J'étudierai d'abord le système

(1) $$x^2 - 6y^2 = u^2 \,, \qquad x^2 + 6y^2 = v^2 \,,$$

qui a été considéré par FERMAT, sous une autre forme, ainsi que nous le verrons plus loin. On tire de la seconde équation en supposant $v + x$ divisible par 3, ce qui ne nuit pas à la généralité de la solution puisque l'on peut laisser indéterminé le signe des inconnues

$$y = 2rs \,, \quad x = 3r^2 - 2s^2, \qquad \text{ou} \qquad y = 2rs \,, \quad x = 6r^2 - s^2 \,;$$

en portant ces valeurs dans la première équation, on en déduit l'une ou l'autre des suivantes

(2) $$9r^4 - 36r^2s^2 + 4s^4 = u^2, \qquad 36r^4 - 36r^2s^2 + s^4 = u^2.$$

La seconde de ces équations peut s'écrire sous la forme

$$(6r^2 - 3s^2)^2 - 8s^4 = u^2 \,,$$

et donne par la décomposition en facteurs,

(3) $$6r^2 - 3s^2 \pm u = \pm 2p^4, \qquad 6r^2 - 3s^2 \mp u = \pm 4p^4, \qquad s = pq.$$

PREMIER CAS. — En prenant les signes inférieurs dans le second membre des équations précédentes, nous obtenons par addition

$$(p^2 - q^2)(2q^2 - p^2) = 6r^2$$

et par suite, en ne tenant pas compte des décompositions impossibles suivant le module 3 ,

$$p^2 - q^2 = 6g^2 \,, \qquad 2q^2 - p^2 = h^2 \,,$$

d'où l'on tire

$$q^2 - 6g^2 = h^2 \,, \qquad q^2 + 6g^2 = p^2 \,,$$

système identique au système proposé. Ainsi d'une solution quelconque x, y, u, v du système proposé, on déduit une série indéfinie de solutions nouvelles, au moyen des formules

(A) $$\mathrm{X} = 6u^2y^2 - v^2x^2, \quad \mathrm{V} = 6u^2y^2 + v^2x^2, \quad \mathrm{U} = v^4 - 2x^4, \quad \mathrm{Y} = 2xyuv.$$

On déduit, par exemple, de la solution immédiate

$$x = 5 \,, \qquad y = 2 \,, \qquad u = 1 \,, \qquad v = 7 \,,$$

indiquée par FIBONACCI[2], la solution nouvelle

---

[1] « *SUR QUELQUES PROBLEMES DE L'ANALYSE DE DIOPHANTE* (LU LE 20 Mars 1717) PAR M. DE LA GRANGE » *(NOUVEAUX MEMOIRES* DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES LETTRES. *ANNEE MDCCLXXVLL, etc.* , pages 140-154. — OEUVRES DE LAGRANGE, etc. TOME QUATRIEME, etc., pages 377-398). — JOURNAL DE MATHEMATIQUES, etc. OU RECUEIL, etc. Publié PAR JOSEPH LIOUVILLE, etc. TOME XVIII. - ANNEE 1853, pages 73-86.

[2] TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. page 90, lig. 17-22. — OPUSCOLI DI LEONARDO PISANO, etc., page 90, lig 15-20. — SCRITTI DI LEONARDO PISANO, etc. VOL. II., etc., page 269, lig. 6-

10. — ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, etc. *TOMO SESTO,* etc., page 278, lig. 20-23. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI, etc. , page 66, lig. 20-23. — Fibonacci énonce le théorème suivant (TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc., page 80, lig. 16-20. — OPUSCOLI DI LEONARDO PISANO, etc., page 80, lig. 16-20. — SCRITTI DI LEONARDO PISANO, etc. VOLUME II, etc., page 264, lig. 18-21).

> « Si duo numeri primi componantur ad se inuicem, feceritque compositus ex iis numerum parem, si solidus numerus, qui fit ab ipsis et ab eorum composito, multiplicetur per numerum in quo maior numerus excedit minorem, egredietur numerus, cuius vigexima quarta pars erit integra ».

Il rappelle ensuite le même théorème en disant (TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc., page 92, lig. 27-28, page 93, lig. 1. — OPUSCOLI DI LEONARDO PISANO, etc., page 92, lig. 24-25, page 93, lig. 1. — SCRITTI DI LEONARDO PISANO, etc. VOLUME II, etc., page 270, lig. 11-12) :

> « unde cuiuslibet congrui vigesima quarta pars est integra, ut superius ostensum est ».

M. GENOCCI (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME QUARANTIEME. JANVIER-JUIN 1855. PARIS, etc. 1855, page 777, lig. 1-12, N° 14. SEANCE DU LUNDI 2 AVRIL 1855. — INSTITUT IMPERIAL DE FRANCE. ACADEMIE DES SCIENCES. Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome XL, séance du 2 avril 1855. *Remarques sur quelques points intéressants des ouvrages de* FIBONACCI *découverts et publiés* récemment par M. LE PRINCE BONCOMPAGNI. Communiquées par M. CHASLES (In 4.°, de 10 pages, dans la 10ème desquelles, numérotée 10, on lit: « PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12 »), page 2, lig. 27-31, page 3, lig. 1-7. — ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, ETC. *TOMO SESTO,* etc., page 119, lig. 3-9, 34, MARZO 1855, page 274, lig. 17-22, 26-29, LUGLIO 1855. — INTORNO A TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. NOTA DI ANGELO GENOCCHI, ROMA, etc. 1855 (In 8.° de 8 pages, dans la huitième desquelles (lig. 10-12) on lit : *« Estratta dagli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche pubblicati in Roma Marzo* 1854 »), page 7, lig. 39, 34, — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI, etc., page 62, lig. 17-23, 26-29) a montré l'analogie de ce théorème, avec une proposition démontrée en 1830 par PIERRE LENTHERIC, né le 9 février 1793 (NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES. JOURNAL, etc. REDIGE Par M. Terquem, etc. M. Gerono, etc. *TOME NEUVIEME, etc.,* PARIS, BACHELIER, etc. 1850 , page 421, lig. 6-71 NOVEMBRE 1850), mort le 19 novembre 1849 (NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES. JOURNAL, etc. REDIGE Par M. Terquem, etc. et M. Gerono, etc. *TOME NEUVIEME,* etc., page 425, lig. 23-24), c'est-à-dire, que le produit $ab\,(a+b)(a-b)$ est toujours divisible par 6 (ANNALES DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES. RECUEIL PERIODIQUE, REDIGE ET PUBLIE Par J. D. GERGONNE, etc. TOME VINGTIEME. A NISMES, etc. 1829 et 1830, page 379, numérotée erronément 376, lig. 20-21, page 380, lig. 1-25) (*), et avec une proposition démontrée par FRENICLE (TRAITE DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES, etc. , Par Monsieur FRENICLE, etc., page 76, lig. 11-24, page 77, lig. 1-2, 16-21, page 78, lig. 1-15, page 79, page 80, lig. 1-12, PROPOSITION XXVI, PROPOSITION XXVIII, PROPOSITION XXIX. « TRAITE DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES par M. FRENICLE », etc. (RECUEIL DE PLUSIEURS TRAITEZ DE MATHEMATIQUE, etc.), page 19, lig. 42-49, page 20, lig. 9-16, 20-34. — MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES. DEPUIS 1666. JUSQU'A 1699, TOME V, etc., page 123, lig. 1-9, 18-25, page 124, lig. 1-4, 8-27. — RESOLUTION, etc. par M. BLONDEL, etc, ET OUVRAGES, etc. DE M. FRENICLE, etc., page 303e, numérotée 123, lig. 1-4, 8-25, page 304e, numérotée 124, lig. 1-4, 8-27. — ANNALES DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES. RECUEIL PERIODIQUE, REDIGE ET PUBLIE, PAR J. D. GERGONNE, etc. TOME VINGT-UNIEME, A NISMES, DE L'IMPRIMERIE DE P. DURAND, etc. 1830 et 1831, page 97, lig. 16, page 98, lig. 1-7), c'est-à-dire, que dans un triangle rectangle, 1.° l'un des côtés de l'angle droit doit être divisible par 4, 2.° l'un des côtés de l'angle droit doit être divisible par 3; 3.° l'un des trois côtés doit être divisible par 5. Cette proposition fut aussi énoncée par M. POINSOT (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME VINGT-HUITIEME. JANVIER-JUIN 1849. PARIS, BACHELIER, etc. 1849. page 582, lig. 35, page 583, lig. 1-9, N° 19, SEANCE DU LUNDI 7 MAI 1849), qui l'appela (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME VINGT-HUITIEME, JANVIER-JUIN 1849, etc., page 582, lig. 33-34) : « théorème nouveau » quoique FRENICLE l'eût donné dans son TRAITE DES TRIANGLES RECTANGLES, publié en 1676. — M. BINET démontra aussi cette proposition dans la séance du 4 juin 1849 de l'académie des sciences (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME VINGT-HUITIEME JANVIER-JUIN 1849, etc., page 686, page 687, lig. 1-l3, n° 23. SEANCE DU LUNDI 4 JUIN 1849).

$$x = 1201\ ,\quad y = 140\ ,\quad u = 1151\ ,\quad v = 1249\ ,$$

et ainsi de suite indéfiniment.

SECOND CAS. — Prenons maintenant. les signes supérieurs dans les équations (3), nous obtenons l'équation

$$p^4 + 3p^2q^2 + 2q^4 = 6r^2\ ,$$

que nous pouvons écrire sous la forme suivante

$$(p^2 + q^2)(p^2 + 2q^2) = 6r^2\ ;$$

nous en déduisons, puisque les facteurs du premier membre n'ont aucun diviseur commun

$$p^2 + q^2 = 2g^2\ ,\qquad p^2 + 2q^2 = 3h^2\ ,\qquad r = gh\ ;$$

c'est d'ailleurs la seule décomposition possible, ainsi qu'il est facile de le voir. On tire de la première des trois équations précédentes

$$p = a^2 - b^2 + 2ab,\qquad \mathrm{q} = a^2 - b^2 - 2ab,\qquad g = a^2 + b^2,$$

et si l'on porte ces valeurs dans la seconde de ces équations, on a la condition

$$(4)\qquad 3(a^4 + b^4 + 3a^2b^2) - 4ab(a^2 - b^2) = 3h^2,$$

L'équation précédente montre que le produit $ab(a^2 - b^2)$ est divisible par 3 ; mais a et b sont premiers entre eux, et l'équation (4) ne change pas en remplaçant a et b par $a + b$ et $a - b$; on peut donc, à cause de la symétrie, remplacer b par $3b$, et ainsi l'éqnation (4) devient

$$(a^2 - 2ab - 9b^2)^2 + 32a^2b^2 = h^2,$$

On en déduit, par la décomposition en facteurs,

$$h \pm (a^2 - 2ab - 9b^2) = \pm 2c^2,\qquad h \mp (a^2 - 2ab - 9b^2) = \pm 16d^2,\qquad ab = cd\ ;$$

la soustraction des équations précédentes donne

$$a^2 - 2ab - 9b^2 = \pm\,(c^2 - 8d^2).$$

Posons maintenant, à cause de $ab = cd$,

$$c = ma\ ,\qquad b = md;$$

nous obtenons par l'élimination de b et de d les équations quadratiques en m

$$a^2 - 2adm - 9d^2m^2 = \pm\,(m^2a^2 - 8d^2).$$

(*) Questa proposizione è anche dimostrata dal Frenicle (TRAITE DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES, ecc. Par Monsieur FRENICLE, ecc., pag. 80, lig. 13-21, pag. 81, lin. 1-9, PROPOSITION XXIX — « TRAITE DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES PAR M. FRENICLE », ecc (RECUEL DE PLUSIEURS TRAITEZ DE MATHEMATIQUES, etc.), pag. 20, lig. 35-40, page. 21, lin. 1-4. — MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES. Depuis 1666. JUSQU'A 1669. TOME V, ecc., pag 125, lin. 1-11. — RESOLUTION, ecc. PAR M. BLONDEL, ecc. et OUVRAGES, ecc. DE M. FRENICLE, etc., pag. 303[a], numerata 125, lin. 1-9) che la enuncia cosi (TRAITE DES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES, ecc. PAR MONSIEUR FRENICLE, ecc., pag. 80, lin. 13-15. — « TRAITE DES TRIANGLES RECTANGLES », ecc. (RECUEIL DE DIVERS TRAITEZ, ecc. , pag. 20, lin. 35-36). — MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES. DEPUIS 1666. JUSQU'A 1699, TOME V, ecc., pag. 125, lin. 1-2. — RESOLUTION, ecc. PAR M. BLONDEL, ecc. ET OUVRAGES, ecc. de M. FRENICLE, ecc., pag. 305a, numerata 125, lin. 1-3) :

« proposition xxx. : L'aire de tout triangle rectangle est mesurée par six. » B. B.

Nous exprimerons que la valeur de m tirée de ces équations est rationnelle, et nous aurons, en prenant le signe inférieur, la condition

$$18a^2d^2 - a^4 - 72d^4 = H^2,$$

impossible suivant le module 3 , puisque a n'est pas divisible par 3 ; nous obtenons, au contraire, en prenant le signe supérieur dans l'équation en m , la condition

$$a^4 + 18a^2d^2 + 72d^4 = H^2$$

et, pour m , la valeur

$$m = \frac{ad \pm H}{a^2 + 9d^2}.$$

Cette dernière équation de condition peut s'écrire

$$(a^2 + 9d^2)^2 - 9d^4 = H^2,$$

et donne par la décomposition en facteurs

$$a^2 + 12d^2 = e^2, \quad a^2 + 6d^2 = f^2, \quad H = ef\ ;$$

cette décomposition nous conduit facilement au système

$$f^2 - 6d^2 = a^2, \quad f^2 + 6d^2 = e^2,$$

identique avec le système proposé.

Par conséquent, d'une solution quelconque x, y, u, v, du système proposé

$$x^2 - 6y^2 = u^2, \quad x^2 + 6y^2 = v^2,$$

on déduira deux solutions nouvelles au moyen des formules suivantes, dans lesquelles X, Y, U, V désignent les nouvelles valeurs des inconnues, et m, n, r, s des quantités auxiliaires :

$$(B)\quad \begin{cases} m = uy \pm vx, \\ n = u^2 + 9y^2, \\ r = (9m^2y^2 + n^2z^2)(8n^2y^2 + m^2z^2), \\ s = (9m^2r^2 + 6mnuy - n^2z^2)(9m^2r^2 - 6mnuy - n^2z^2), \\ X = 6r^2 - s^2, \\ V = 6r^2 + s^2, \\ Y = 2rs\ , \\ U = (n^2u^2 - m^2y^2 + 2mnuy)^4 - 2(n^2u^2 - m^2y^2 - 2\ mnuy)^4. \end{cases}$$

Ainsi la solution immédiate

$$x = 5\ , \quad y = 2\ , \quad u = 1\ , \quad v = 7\ ,$$

donne, en prenant, dans la valeur de m , le signe supérieur

$$X = 2639802\ , \qquad V = 10113607,$$
$$Y = 7776485\ , \qquad U = 4319999\ ;$$

c'est-à-dire

$$(2639802)^2 - 6\ (7776485)^2 = (4319999)^2,$$
$$(2639802)^2 + 6\ (7776485)^2 = (10113607)^2.$$

Remarque 1. — Nous n'avons jusqu'à présent considéré que la seconde des équations (2) quant à la première, on peut l'écrire sous la forme

$$(3r^2 - 6s^2)^2 = u^2 + 2(2s)^4.$$

On en déduit, par la décomposition en facteurs,

$$3r^2 - 6s^2 \pm u = \pm 2p^4, \qquad 3r^2 - 6s^2 \mp u = \pm(2q)^4, \qquad s = pq,$$

et par suite, en ajoutant les deux premières

$$3r^2 = 6p^2q^2 \pm (p^4 + 8q^4),$$

équation impossible suivant le module 8 ; on n'a donc aucune solution nouvelle. Par conséquent les formules (A) et (B) résolvent complètement les équations proposées.

Remarque II. — Le système précédent peut encore s'obtenir par la résolution du problème suivant :

Trouver trois carrés en progression arithmétique dont la raison soit égale au sextuple d'un carré. Cette remarque s'applique aussi bien aux équations fondamentales concernant un nombre congruent a différent de 6, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Il est impossible de trouver trois carrés en progression arithmétique dont la raison soit égale à un carré, au double d'un carré ou au triple d'un carré.

Remarque III. — Le système considéré résout encore l'une ou l'autre des deux équations biquadratiques

$$x^4 - 3y^4 = z^2, \qquad x^4 - y^4 = 24z^2,$$

et, par suite, on en déduit aisément que les deux équations biquadratiques

$$x^4 - 36y^4 = z^4, \qquad x^4 - y^4 = 24z^4,$$

sont, prises séparément, impossibles à résoudre en nombres entiers ou rationnels.

6.

J'étudierai en second lieu le système suivant

(1) $$x^2 - 5y^2 = u^2, \qquad x^2 + 5y^2 = v^2,$$

qui a été considéré par LEONARD DE PISE[1], par LUCAS PACIOLI[2], par

---

[1] THE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc., page 96, lig. 1-13. — OPUSCOLI DI LEONARDO PISINO, etc., page 96, lig. 4-16. — SCRITTI DI LEONARDO PISANO, etc. VOL. II, etc., page 271, lig. 27-35. — ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, etc. *TOMO SESTO, etc.* page 145, lig. 9-26, page 146, page 147, lig. 1-3, page 289, lig. 17-27, page 290, lig. 1-6. — INTORNO ALLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI SIMULTANEE $x^2 + h = y^2$, $x^2 - h = z^2$. NOTA DI BALDASSARRE BONCOMPAGNI, etc. Roma, etc. 1855, etc., page 13, lig. 9-26, page 14, pag. 15, lig. 1-3. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI, etc. page 77, lig. 17-27, page 78, lig. 1-6.

[2] Suma de Arithmetica, etc., feuillet 23[ème], numéroté 16, recto, lig. 2-4. — Summa de Arithmetica, etc., feuillet 23[ème], numéroté 15,. lig. 2-4.

EULER[1], et plus récemment par MM. COLLINS[2] et GENOCCHI[3] ; mais la résolution est restée incomplète.

On arrive encore au système précédent, par le problème suivant :

Trouver trois carrés en progression arithmétique dont la raison soit égale au quintuple d'un carré.

On peut supposer d'abord que les inconnues x, y, u, v sont des nombres premiers entre eux ; on déduit, de la première équation du système, que l'inconnue x est un nombre impair, et de la seconde que v est aussi un nombre impair ; il en résulte que y est un nombre pair. On peut donc poser, d'après la première équation

$$x - u = 10r^2, \qquad x + u = 2s^2, \qquad y = 2rs\ ,$$

r et s désignant deux nombres premiers entre eux; on en déduit

$$x = 5r^2 + s^2,$$

et en portant cette valeur et celle de y dans la seconde équation du système proposé, on a l'équation

$$25r^4 + 30r^2s^2 + s^4 = v\ ;$$

la décomposition en facteurs nous donne

$$5r^2 + 3s^2 \pm v = 2p^4, \qquad 5r^2 + 3s^2 \mp v = 4q^4, \qquad s = pq,$$

p et q désignant deux nombres premiers entre eux. L'addition des deux premières des trois formules précédentes donne ensuite, en remplaçant s par sa valeur :

$$p^4 - 3p^2q^2 + 2q^4 = 5r^2\ .$$

Mais cette équation peut se mettre sous la forme

$$(p^2 - q^2)(p^2 - 2q^2) = 5r^2\ ,$$

et si l'on observe que les deux facteurs du premier membre de cette équation sont premiers entre eux, on en conclut l'une ou l'autre des deux hypothèses possibles

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = 5g^2\ , \\ p^2 - 2q^2 = h^2\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} p^2 - q^2 = -\,5g^2\ , \\ p^2 - 2q^2 = -\,h^2\ , \end{cases}$$

quant aux décompositions suivantes

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = g^2\ , \\ p^2 - 2q^2 = 5h^2\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} p^2 - q^2 = -\,5g^2\ , \\ p^2 - 2q^2 = -\,h^2\ , \end{cases}$$

elles sont évidemment impossibles, si l'on prend les résidus suivant le module 5,

La seconde des deux hypothèses possibles conduit au système

$$q^2 - 5g^2 = p^2, \qquad q^2 + 5g^2 = h^2,$$

---

[1] Vollständige Anleitung zur Algebra von Hru. Leonhard Euler. Zweyter Theil, etc. page 462, lig. 4-8. — *ELEMENS* D'ALGEBRE *PAR M. LEONHARD EULER*, etc. TOME SECOND, etc., page 291, lig. 3-7. — ELEMENS D'ALGEBRE, PAR LEONARD EULER, etc. TOME SECOND, etc., page 215, lig., 6-12.

[2] A TRACT ON THE POSSIBLE AND IMPOSSIBLE CASES OF QUADRITIC DUPLICATE EQUALITIES, etc. BY MATTHEW COLLINS, etc., page 6, lig. 34-45, page 7, lig. 1-43.

[3] ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE COMPILATI DA BARNABA TORTOLINI *etc.* *TOMO SESTO*, etc., page 289, lig. 17-27, page 290, lig. 1-7, LUGLIO 1855. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI, etc. *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI, etc., page 77, lig. 11-27, page 78, lig. 1-4.

identique au système proposé ; et, par conséquent, d'une première solution *(x, y, u, v)* de ce système, on déduira une infinité de solutions, par les formules

(A) $\quad X=u^2x^2+5v^2x^2, \quad U=u^2x^2-5v^2x^2, \quad V=u^4-2x^4, \quad Y=2xyuv.$

Les formules (A) que nous donnons ici ne diffèrent que par la forme de celles qui ont été données par M. GENOCCHI à l'endroit cité cidessus ; mais elles ne résolvent pas completement la question proposée dans le *Flos* de LEONARD DE PISE[1]. La solution donnée par le célèbre géomètre[2] $x=3+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{41}{12}$ est la solution en moindres nombres, ainsi que nous allons le démontrer ; elle se déduit de la première hypothèse obtenue, dans les décompositions précédentes, qui conduit au système des équations

$$5g^2+q^2=p^2, \qquad 5g^2-q^2=h^2\,;$$

ce système admet la solution immédiate $g=1$, $q=2$, $p=3$, $h=1$; on ne déduit la première solution du système proposé

$$x=41\,, \qquad y=2\,, \qquad u=31\,, \qquad v=49$$

qui coïncide avec la solution donnée par LEONARD DE PISE.

Mais, ce dernier système a une infinité d'autres solutions, desquelles on peut déduire une première solution du système (1), et, de chacune de ces première solutions, une série indéfinie de nouvelles solutions du même système.

§. 7.

SUR UN PROBLEME DE BEHA HEDDIN.

Je considérerai encore le système suivant, proposé par l'auteur arabe BEHA-HEDDIN, à la fin du traité de calcul, Khélasat al Hisâh, don t nous avons parlé plus haut[3] :

---

[1] « Cvm coram maiestate uestra, gloriosissime princeps, Frederice, magister Johannes panormitanus, phylosophus uester, pisis mecum multa de numeris contulisset, interque duas questiones, que, non minus ad geometriam quam ad numerum pertinent, proposuit, quarum prima fuit ut inueniretur quadratus numerus aliquis, cui addito uel diminuto quinario numero, egrediatur quadratus numerus, quem quadratum numerum, ut eidein magistro Johanni retuli, inveni esse hunc numerum, undecim et duas tertias et centesimam quadragesimam quartam unius. Cuius numeri radix est ternarius et quarta et VI. unius. » (TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc., page 2, lig. 15-25. — OPUSCOLI DI LEONARDO PISANO. etc , page 2, lig. 15-25 — SCRITTI DI LEONARDO PISANOO, etc. VOLUME II, etc. , page 227, lig. 24,31).

[2] TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc., page 96, lig. 2-12. — OPUSCOLI DI LEONARDO PISANO, etc., page 96, lig 4-15.— SCRITTI DI LEONARDO PISANO, etc. VOLUME II, etc., page 271, lig. 27-35. — voyez la note 1 de cette page.

[3] « Si à un carré on ajoute sa racine et 2, si ensuite de ce même carré on retranche sa racine et 2, alors on doit pouvoir extraire la racine carré de la somme et du reste » (KHOLACAT AL HISSAB, *OU* QUINTESSENCE DU CALCUL, PAR BEHA-EDDIN AL AAMOULI, TRADUIT ET ANNOTE PAR ARISTIDE MARRE, etc., page 51. lig. 11-l3 — NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES. JOURNAL, etc, Rédigé par MM. TERQUEM, etc. ET GERONO, etc. TOME CINQUIEME, etc., page 313, lig.14-16.— KHELASAT AL HISA'B,

$$x^2+x+2=u^2, \qquad x^2-x-2=u^2 ;$$

nous remplacerons les inconnues rationnelles par des inconnues entières, et nous aurons ainsi

(1) $$x^2 + xy + 2y^2 = u^2, \qquad x^2 - xy - 2y^2 = v^2,$$

Le traducteur français de l'ouvrages en question avait trouvé seulement la solution $x = 17$, $y = -16$, et en avait conclu, comme le présumait l'auteur arabe, que ce problème est difficile à résoudre en nombres entiers et positifs. M.r GENOCCHI, dans son Commentaire[1], a donné la solution $x = 34$, $y = 15$, mais n'a point donné la solution générale. La méthode que nous proposons ici nous parait donner pour la première fois, la solution complète du problème de BEHA-EDDIN.

On déduit du système (1), dans lequel on peut supposer que les indéterminées x, y, u, v représentent des nombres entiers premiers entre eux,

$$u^2 + v^2 = 2x^2.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = x^2.$$

On doit donc poser, par la formule de résolution des triangles rectangles en nombres entiers

$$\frac{u-v}{2} = 2rs, \quad \frac{u+v}{2} = r^2 - s^2, \quad x = r^2 + s^2,$$

et par suite

$$u = r^2 - s^2 + 2rs , \qquad v = r^2 - s^2 - 2rs , \qquad x = r^2 + s^2.$$

Si nous portons ces valeurs dans l'équation obtenue en retranchant membre à membre les deux équations du système proposé nous obtenons

$$2y^2 + xy = 4rs(r^2 - s^2),$$

et, en résolvant cette équation par rapport à y , nous trouvons

$$y = \frac{-x \pm t}{4},$$

t étant une inconnue donnée par l'écluation indéterminée

(2) $$(r^2 + s^2)^2 + 32rs(r^2 - s^2) = t^2.$$

Ainsi donc le système proposé est ramené à l'équation précédente, qui représente la mise en équation du problème suivant :

PROBLEME. — *Trouver en nombres entiers tort triangle rectangle tel que l'aire du carré de l'hypoténuse augmentée de trente-deux fois*

---

ou (Essence du calcul), etc., page 53, lig. 14-16). — « Wenn man zu einem Quadrat seine Wurzel und 2 addirt, und darauf seine Wurzel und zwei von demselben subtrahirt, so soll aus der Summe und dem Reste sich die Wurzel ziehen lassen » (Essenz der Recheukunst, etc., page 56, lig. 9-12).

[1] ANNALI DI SCIENZE MATHEMATICHE E FISICHE COMPILATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. *TOMO SESTO*, etc., page 303, lig. 3-32, page 304, lig. 1-67. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI, etc., *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI, etc., page 91, lig. 3-32, page 92, lig. 1-7.

l'aire du triangle soit égale à un carré parfait.

Nous résoudrons ainsi ce problème, en même temps que celui de BEHA-EDDIN. L'équation (2) a pour solution immédiate

$$r = 1, \quad s = 1, \quad t = 2,$$

et le système (1) a, par suite, pour solutions

$$x = 2, \quad y = 0, \quad u = 2, \quad v = 2,$$

et

$$x = 2, \quad y = -1, \quad u = 2, \quad v = 2,$$

Pour résoudre l'équation (2), on l'écrit sous la forme

$$(r^2 + 16rs - s^2)^2 - 252r^2s^2 = t^2,$$

ou encore

$$(r^2 + 16rs - s^2)^2 - t^2 = 252r^2s^2.$$

Mais, si l'on remarque que le polynôme $r^2 + 16rs - s^2$, ou le polynôme équivalent $(r^2 + 8s)^2 - 65s^2$ n'est pas divisible par 3, on obtient, par la décomposition en facteurs, l'une ou l'autre des deux hypothèses

$$r^2 + 16rs - s^2 \pm t = \pm 14(3p)^2, \quad r^2 + 16rs - s^2 \mp t = \pm 2q^2, \quad rs = pq;$$

les signes supérieurs doivent être pris simultanément. L'addition des deux prémières équations donne les systèmes indéterminés

(3) $$r^2 + 16rs - s^2 = \pm(63p^2 + q^2), \quad rs = pq$$

PREMIER CAS. — Si nous prenons le signe $+$ dans la première équation, et si nous posons $r = mp$ et $q = ms$, nous obtenons par l'élimination de r et de q l'équation quadratique

$$m^2(s^2 + p^2) - 16mps + 63p^2 + s^2 = 0,$$

la valeur de m doit être rationnelle ; on doit donc avoir, en exprimant que la quantité placée sous le radical, dans la valeur de m, est un carré parfait, l'équation de condition

$$(9p^2 - s^2)(7s^2 + p^2) = \mathrm{V}^2,$$

et l'on a, de plus

$$m = \frac{5ps \pm \mathrm{V}}{s^2 - p^2}$$

L'équation de condition est immédiatement satisfaite par les valeurs

$$p = 1, \quad s = 1, \quad v = 8$$

On en tire dans ce cas, mais dans ce cas seulement, puisque le coefficient de m^2, dans l'équation qui détermine cette inconnue, s'annule,

$$m = 4,$$

et par suite

$$r = 4 \quad s = 1.$$

Par conséquent, le triangle rectangle le plus petit, dont les côtés satisfont au problème que nous avons posé ci-dessus, est formé des nombres 4 et 1 ; il a pour côtés

$$8, \quad 15, \quad 17,$$

et l'on a

$$17^2 + 32.\,60 = 47^2.$$

On obtient, à l'aide des mêmes valeurs de r et de s, les deux solutions du système de BEHA-EDDIN qui ont été données par M. GENOCCHI[1] à l'endroit cité.

On déduit de la dernière équation de condition, le seul système

(4) $$9p^2 - s^2 = 8g^2, \quad 7p^2 + s^2 = 8h^2, \quad \mathrm{V} = gh$$

et, par voie d'addition et de soustraction ,

$$2p^2 = g^2 + h^2, \quad p^2 - s^2 = 4(g^2 - h^2).$$

Nous résoudrons la première des équations qui précédent, ainsi que nous l'avons fait ci-dessus, au moyen des formules

$$p^2 = a^2 + b^2, \quad g = a^2 - b^2 - 2ab, \quad h = = a^2 - b^2 + 2ab$$

et en portant ces valeurs dans la seconde équation, on a

$$(a^2 + b^2)^2 + 32ab(a^2 - b^2) = s^2,$$

nous retombons ainsi sur l'équation (3) qui contient ici des inconnues beaucoup plus petites. Par conséquent d'une solution quelconque r, s, t de l'équation

(2) $$(r^2 + s^2)^2 + 32rs(r^2 - s^2) = t^2.$$

on déduit deux séries indéfinies de solutions nouvelles R, S, T , par les formules

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{array}{l} m = t(r^2+s^2) \pm (r^4+s^4-6r^2s^2), \\ n = 4rs(r^2-s^2), \\ \mathrm{R} = m(r^2+s^2), \\ \mathrm{S} = nt, \\ \mathrm{T} = 63n^2(r^2+s^2) - m^2t^2. \end{array} \right.$$

On a ensuite, pour le système proposé

(1) $$x^2 + xy + 2y^2 = u^2, \qquad x^2 - xy - 2y^2 = v^2,$$

les formules de résolution

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r^2+s^2, \\ 4y = -(r^2+s^2) \pm t^2, \\ u = r^2-s^2+2rs, \\ v = r^2-s^2-2rs. \end{array} \right.$$

Nous ferons observer que l'on doit commencer le calcul par la suppression des facteurs communs aux deux inconnues auxiliaires m et n.

SECOND CAS. — Il nous reste à considérer le système déduit de l'équation (3) en prenant les signes inférieurs. On obtient alors

[1] ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE COMPILATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. *TOMO SESTO*, etc., PAGE 304, LIG, 1-3. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI, etc. *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI, etc., page 92, lig. 1-3.

l'équation quadratique en m

$$m^2(s^2+p^2)+16mps + s^2-63p^2 = 0.$$

si l'on exprime que la valeur de m est rationnelle, on a l'équation de condition

$$(s^2-7p^2)(s^2+9p^2)= \mathrm{V}^2,$$

et, de plus,

$$m=\frac{-8ps\pm \mathrm{V}}{p^2+s^2},$$

On déduit de cette équation de condition, puisque s^2+9p^2 ne peut être le double d'un carré, le système

(5) $$s^2-7p^2=g^2,\quad s^2+9p^2=h^2,\quad \mathrm{V}=gh$$

qui admet la solution immédiate

$$s=4,\quad p=1,\quad g=3,\quad h=5\ ;$$

mais cette solution ne donne point de valeurs nouvelles, pour les inconnues du système (1).

Pour résoudre le système (5), on en déduit par soustraction

$$16p^2=h^2-g^2,$$

et par la décomposition en facteurs,

$$h+g=2u^2,\quad h-g=8v^2,\quad p=uv\ ;$$

en portant ces valeurs dans l'une des équations du système (5), nous obtenons la nouvelle équation

$$u^4-u^2v^2+16v^4=s^2,$$

que nous pouvons écrire sous la forme,

$$(u^2+4v^2)^2-9u^2v^2=s^2,$$

et qui donne par la décomposition en facteurs

$$u^2+4v^2\pm s=9z^2,\quad u^2+4v^2\mp s=w^2,\quad uv=zw,$$

On en déduit le système

$$2u^2+8v^2=9z^2+w^2,\quad uv=zw.$$

Pour résoudre ce système, nous poserons, ainsi que nous le faisons habituellement

$$u=mw,\quad z=mv\ ;$$

il en résulte l'équation

$$m^2=\frac{8v^2-w^2}{9v^2-2w^2}.$$

Pour que la valeur de m tirée de cette dernière équation soit rationnelle, on doit poser

$$9v^2-2w^2=\alpha c^2,\quad 8v^2-w^2=\alpha d^2,$$

α désignant le plus grand commun diviseur des deux termes de la valeur de m^2 ; mais on ne peut supposer $\alpha=\pm 1$, $\alpha=-7$ puisqu'alors les équations précédentes sont impossibles, suivant le module 2 ou le module 3 ; il nous reste donc le seul système

$$9v^2-2w^2=7c^2, \qquad 8v^2-w^2=7d^2,$$

duquel on déduit, par une transformation facile

$$9d^2-w^2=8c^2, \qquad 7d^2+w^2=8v^2.$$

Ce système est identique avec celui des formules (4) et contient des inconnues plus petites. Le problème de BEHA-EDDIN se trouve ainsi résolu complètement. Nous remarquerons avant de quitter ce sujet, que le système (1) peut s'écrire

$$(2x+y)^2+7y^2=4u^2, \quad (2x-y)^2-9y^2=4v^2.$$

§ 8.

SUR LA MULTIPLICATION DES NOMBRES CONGRUENTS.

WOEPCKE a traité le problème de la multiplication des nombres congruents, dont l'énoncé lui avait été proposé par M. le Prince BONCOMPAGNI sous la forme suivante : « *Etant donné un nombre congruent, trouver un autre nombre congruent, tel que le produit simple des deux nombres congruents soit, de nouveau un nombre congruent* »[1].

Parmi les divers résultats signalés par WOEPCKE pour arriver à la solution de ce problème, je considérerai seulement le suivant : Si le nombre congruent donné

$$\mathrm{A} = ab(a^2 - b^2),$$

est formé au moyen des deux nombres a et b satisfaisant à l'équation biquadratique

$$(1) \qquad 9a^4 - 20a^3b - 2a^2b^2 + 20ab^3 + 9b^4 = c^2,$$

le produit du nombre congruent A par le nombre congruent

$$\mathrm{A}_1 = a_1b_1(a_1^2 - b_1^2),$$

dans lequel on suppose

$$a_1=a^2-4ab-b^2\pm c, \qquad b_1=2(a-b)(2a+b),$$

sera le nombre congruent

$$\mathrm{A}_2 = a_2b_2(a_2^2 - b_2^2),$$

dans l'expression duquel

$$a_2=2b(2a+b), \qquad b_2 = -3a^2 + 2ab + 3b^2 \pm c.$$

Nous ne tenons pas compte, bien entendu, des facteurs quadratiques

---

[1] *ANNALI* DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, PUBBLICATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. E Compilati da E. BETTI *a Pisa.* F. BRIOSCHI *a Parma.* A GENOCCHI *a Torino.* B. TORTOLINI *a Roma.* (In Continuazione agli Annali di Science Matematiche e Fisiche) TOMO IV. ANNO 1861. ROMA. etc. 1861, pages 247-255 N° 4. — SUR LA MULTIPLICATION DES NOMBRES CONGRUENTS. LETTRE ADRESEE A MONSIEUR LE PRINCE DON BALTHASAR BONCOMPAGNI PAR M. F. WOEPCKE, MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADEMIE PONTIFICALE DES *NUOVI LINCEI.* ROME, TYPOGRAPHIE DES SCIENCES MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES. 1862 (In 4°, de 11 pages).

des nombres congruents[1]. La méthode que nous avons employée ci-dessus, s'applique encore à la résolution de l'équation (1), donnée par WOEPCKE. On peut, en effet, écrire cette équation sous la forme

$$(9a^2 - 10ab - 9b^2) + 44\, a^2b^2 = 9c^2,$$

et, par suite,

$$3c \pm (9a^2 - 10ab - 9b^2) = 2p^2, \quad 3c \mp (9a^2 - 10ab - 9b^2) = 22q^2, \quad ab = pq;$$

On en déduit

$$p^2 - 11q^2 = \pm\, (9a^2 - 10ab - 9b^2),$$

et, si l'on pose, comme ci-dessus

$$b = mq\ , \qquad p = a\ ,$$

on obtient, par l'élimination de b et de p, deux équations quadratiques en m. Pour que la valeur de m tirée de l'une ou l'autre de ces équations soit rationnelle, il faut que l'on ait

(2) $$13a^2q^2 \pm (a^4 + 11q^4) = z^2,$$

On a aussi dans le premier cas, en prenant le signe +

$$m = \frac{5aq \pm 3z}{a^2 + 9q^2},$$

et dans le second, en prenant le signe –

$$m = \frac{-5aq \pm 3z}{a^2 - 9q^2}\ .$$

Les équations (2) ont pour solution immédiate

$$a = 1\ , \quad q = 1\ , \quad z = 5,$$

dans le premier cas, et

$$a = 1\ , \quad q = 1\ , \quad z = 1,$$

dans le second. Les quatre premières solutions de l'équation de WOEPCKE sont ainsi

I.	$-a = 1,$	$b = 1,$	$c = 4,$
II.	$-a = 1,$	$b = -2,$	$c = 5,$
III.	$-a = 1,$	$b = -1,$	$c = 4,$
IV.	$-a = 1,$	$b = -1,$	$c = 59.$

PREMIER CAS. Considérons d'abord l'équation (2), prise avec le signe supérieur, et écrite sous la forme

$$x^4 + 13x^2y^2 + 11y^4 = z^2,$$

[1] ANNALI DI MATEMATICA, etc. TOMO IV, etc., page 248, lig. 23. — SUR LA MULTIPLICATION DES NOMBRES CONGRUENTS, etc., page 4, lig. 23. — ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICITA, PUBBLICATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. E Compilati da E. BETTI *a Pisa*. F BRIOSCHI *a Parma*. A GENOCCHI *a Torino*. B. TORTOLINI *a Roma*. (In continuazione agli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche) TOMO III. ANNO 1860. ROMA, etc. 1860, pages 206-215, N° 4. — SOPRA LA TEORICA DEI NUMEIRI CONGRUI, *NOTA* DI F. WOEPCKE. Estratta dagli Annali di matematica pura ed applicata Tomo III. n.° 4. Iuglio-agosto 1860, ROMA, TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, Via Lata N.° 211 A, 1860 (In 4.° de 12 pages).

ou encore

$$(2x^2 + 13y^2)^2 - 125y^4 = 4z^2.$$

On en déduit par la décomposition en facteurs, l'une des deux hypothèses suivantes, rangées sous les signes A et B

(A) $$2x^2 + 13y^2 \pm 2z = r^4, \quad 2x^2 + 13y^2 \mp 2z = 125s^4, \quad y = rs,$$

et, par suite ,

$$r^4 - 26r^2s^2 + 125s^4 = 4x^2, \quad \text{ou bien} \quad (r^2 - 13s^2)^2 - 4x^2 = 44s^4.$$

Cette dernière équation donne, par la décomposition en facteurs

$$r^2 - 13s^2 \pm 2x = \pm 2u^4, \quad r^2 - 13s^2 \mp 2x = \mp 22v^4, \quad s = uv,$$

et ces deux hypothèses conduisent aux équations

$$13u^2v^2 \pm (u^4 + 11v^4) = r^2,$$

identiques avec les équations (2) ; mais celles-ci contiennent des indéterminées beaucoup plus petites.

L'équation (2) prise avec le signe supérieur donne encore la décomposition

(B) $$2x^2 + 13y^2 \pm 2z = 5r^4, \quad 2x^2 + 13y^2 \mp 2z = 25s^4, \quad y = rs,$$

et par suite ,

$$5r^4 - 26r^2s^2 + 25s^4 = 4x^2.$$

On obtient, en résolvant par rapport à s^2,

$$25s^2 = 13r^2 \pm \mathrm{U} ,$$

avec l'équation de condition

$$44r^4 + 100x^2 = \mathrm{U}^2,$$

qui donne

$$\mathrm{U} \pm 10x = \pm 2g^4, \quad \mathrm{U} \mp 10x = \pm 22h^4, \quad r = gh,$$

et, par suite

$$25s^2 = 13g^2h^2 \pm (u^4 + 11v^4) ;$$

par conséquent, on retrouve encore les équations (2).

SECOND CAS. — Nous avons supposé y impair ; en supposant maintenant y pair, et par conséquent x impair, nous obtenons encore les deux décompositions

(C) $$2x^2 + 13y^2 \pm 2z = 2r^4, \quad 2x^2 + 13y^2 \mp 2z = 8.125s^4, \quad y = 2rs,$$

ou

(D) $$2x^2 + 13y^2 \pm 2z = 8r^4, \quad 2x^2 + 13y^2 \mp 2z = 2.125s^4, \quad y = 2rs,$$

En ajoutant les deux premières équations des décompositions (C) et (D), on en conclut que r ou s, et, par suite x , serait divisible par 2, ce que l'on n'a pas supposé.

Enfin, en prenant le signé – dans l'équation (2), on se trouve encore ramené aux mêmes équations, avec des indéterminées plus petites.

CHAPITRE III.

DE LA RESOLUTION COMPLETE DES EQUATIONS BIQUADRATIQUES INDETERMINEES

$$Ax^4 \pm By^4 = \pm Cz^2, \quad \text{et} \quad Ax^4 \pm By^4 = \pm Cz^4,$$

DANS LESQUELLES A , B , C , DESIGNENT DES NOMBRES ENTIERS NE CONTENANT QUE LES FACTEURS PREMIERS 2 ET 3.

Le but que je me puis proposé dans ce chapitre, est de faire voir que la méthode inventée par FERMAT, et qu'il considérait comme une de ses découvertes les plus importantes, et les plus difficiles[1], peut s'appliquer non-seulement à la démonstration de l'impossibilité des équations indéterminées des degrés supérieurs, mais encore à la résolution de ces équations, lorsque cette résolution est possible. LAGRANGE a donné, le premier, dans un Mémoire lu le 20 mars 1777, à l'Académie de Berlin, la solution générale des équations.

$$x^4 - 2y^4 = \pm z^2,$$

et de l'équation

$$x^4 + 8y^4 = \pm z^2,$$

qui s'y ramène immédiatement par la décomposition en facteurs ; ces équations rentrent dans la forme que nous considérons puisque les coefficients A, B, C ne contiennent ici que le facteur premier 2 ; c'est, dans ce cas, les seules équations possibles[2]. La publication du Mémoire de LAGRANGE attira l'attention d'EULER, qui avait traité fort incomplètement, ces équations, dans son Traité d'algèbre[3], et

---

[1] *« Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus, huius theorematis à nobis inuenti demonstrationem quam & ipsi tandem non sine operosà & laboriosã meditatione deteximus, subiungemus. Hoc nempè demonstrandi genus miros in arithmeticis suppeditabit progressus, si area trianguli esset quadratus darentur duo quadratoquadrati quorum differentia esset quadratus : Vnde sequitur dari duo quadrata quorum & summa, & differentia esset quadratus »* (DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORUM LIBRI SEX, etc. TOLOSÆ, 1670, page 339, lig. 47-48, page 339, lig, 1-2, LIBER SEXTVS, QVÆSTIO XXVI, PROBLEMA XX, OBSERVATIO D. P. F.). — « OBS. DE FERMAT. *L'aire d'un triangle rectangle exprimée en nombres entiers ne peut être égale à un carré. Nous placerons ici la démonstration de ce théorème, de notre invention, que nous avons découverte après une laborieuse et pénible méditation. Ce genre de démonstration produira de merveilleux progrès dans les questions arithmétiques. Si l'aire d'un triangle était un carré, on donnerait deux quatrièmes puissances dont la différence serait un carré* » (MEMOIRES DE L'ACADEMIE, etc. DE TOULOUSE, etc. Quatrième Série TOME III, etc., page 127, lig. 11-18. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT, etc. PAR E. BRASSINNE, etc., page 127, lig. 11-18).

[2] *« SUR QUELQUES PROBLEMES DE L'ANALYSE DE DIOPHANTE.* Lu le 20 Mars 1777. PAR M. DE LA GRANGE ». *NOUVEAUX MEMOIRES* DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES LETTRES. *ANNEE MDCCLXXVLL.* AVEC L'HISTOIRE POUR LA MEME ANNEE. A *BERLIN*, Imprimé chez GEORCE JACQUES DECKER, Imprimeur du Roy. MDCCLXXIX, pages 140-l54. — OEUVRES DE LAGRANCE, PUBLIEES PAR LES SOINS DE M. J.-A. SERRET, SOUS LES AUSPICES DE SON EXCELLENCE LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, TOME QUATRIEME, PARIS, GAUTHIER VILLARS, etc. M DCCC LXIX, pages 377-398).

[3] Vollständige Anleitung zur Algebra, von Hrn. Leonhard Euler. Zweyter Theil, etc. St. Petersburg, etc. 1770, § 240, page 503, lig. 10-21, pages 504-505. — *ELEMENS* D'ALGEBRE *PAR M. LEONARD EULER,* etc. TOME SECOND, etc. A *LYON,* etc. M.DCC.LXXIV, etc., § 240, page 336, lig. 12-21, pages 337-338, page 339, lig. 1-6. — ELEMENTS D'ALGEBRE PAR LEONARD EULER, etc. DE L'ANALYSE INDETERMINEE. A LYON, etc. l' an III), etc. , § 240, page 316, lig. 12-21, pages 337-338, page 339, lig. 1-6.

l'engagea à reprendre cette question qu'il a développée dans plusieurs Mémoires présentés à l'Académie de Saint-Pétersbourg. Le premier présenté le 18 Mai 1780, et publié en 1824[1], commence ainsi[2] :

> « Celebre est et nuper ab illustri *Lagrange* singulari studio pertractatum problema a *Fermatio* olim propositum, quo quæruntur duo numeri, integri, positivi, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum. Hinc occasionem arripui istam quæstionem ad tres pluresve numeros extendendi, certa spe fretus, ejus solutionem sine tantis ambagibus expediri posse ».

Le second de ces trois mémoires d'EULER présenté à l'Académie Impériale de Saint Pétersbourg le 3 juin 1780, et publié en 1825[3] commence ainsi[4] :

> « §. 1. In solutionibus hujus problematis, quæ hactenus passim in medium sunt allatæ, III. *La Grange* id potissimum merito reprobat, quod nimium casui et vagis tentaminibus tribuatur, unde fit, ut certi esse nequeamus, omnesne solutiones, atque adeo simplicissimas, hoc modo inventas esse. Huic igitur desiderato sequenti analysi satisfactum iri confido ».

Le troisième de ces trois mémoires fut présenté à la même Académie dans la séance du 12 juin 1780, et publié en 1830[5].

Il est fait mention du mémoire de LAGRANGE, dans une *Thèse* intitulée « DE QUIBUSDAM ÆQUATIONIBUS INDETERMINATIS QUARTI GRADUS. DISSERTATIO QUAM CONSENSU ET AUCTORITATE AMPLISSIMI ORDINIS PHILOSOPHORUM IN UNIVERSITATE LITTERARIA FRIDERICA GUILELMA BEROLINENSI PRO SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS RITE CAPESSENDIS DIE XXIII. M. DECEMBRIS A. MDCCCXXXIX. PALAM DEFENDET AUCTOR AUGUSTUS EPHRAIM KRAMER NORDHUSANUS, ADVERSARII ERUNT ; C. FRANKE, PHILOS. DR. J. MUENTER, MED. STUD. W. SCHÆFFER, PHILOS. DR. BEROLINI, TYPIS NIETACKIANIS ». Dans cette thèse (page 3, lig. 23-26, page 4, lig. 1-6) on lit :

> « Unicum tantum exstat exemplum, in quo diserte demons-

---

[1] « DE TRIBUS PLVRIBUSVE NVMERIS INVENIENDIS, QVORVM SVMMA SIT QVADRATVM, QUADRATORUM VERO SUMMA BIQUADRATUM. AUCTORE *L. EULERO*. Conventui exhibit. die 18. Mai 1780 ». (MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES DE S.T PETERSBOURG. TOME IX. AVEC L'HISTOIRE DE L'ACADEMIE POUR LES ANNEES 1819 ET 1820. S.T PETERSBOURG. DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES, 1824. SECTION DES SCIENCES MATHEMATIQUES, pages 3-13.

[2] MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES DE S.T PETERSBOURG. TOME IX., etc., page 3, lig. 8-13.

[3] « SOLUTIO PROBLEMATIS FERMATIANI DE DUOBUS NUMERIS, QUORUM SUMMA SIT QUADRATUM, QUADRATORUN VERO SUMMA BIQUADRATUM. AD MENTEM ILL. *LA. GRANGE* ADORNATA. AUCTORE *L. EULERO.* Conventui exhib. die 5 Junii 1780 » (MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES DE S.T PETERSBOURG. TOME X. AVEC L'HISTOIRE DE L'ACADEMIE POUR LES ANNEES 1821 ET 1822. S.T PETERSBOURG. DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES. 1826. I. SECTION DES SCIENCES MATHEMATIQUES, page 3-6).

[4] MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES DE S.T PETERSBOURG. TOME X., etc., page 3, lig. 10-15.

[5] « COMMENTATIONES *cel. L. EULERI.* I DE INSIGNI PROMOTIONE ANALYSIS DIOPHANTÆ. Conventui exhibita die 12 Iuni 1780 » (MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES DE S.T PIETERSBOURG. TOME XI. S.T PETERSBOURG, DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES. 1830, pages 1-11).

trare licet, qua ratione omnes solutionses trium harum Aequationum

$$2x^4 - y^4 = z^2 ; \quad x^4 - 2y^4 = z^2 ; \quad x^4 + 8y^4 = z^2 ;$$

iterandis semper iisdem « operationibus » deinceps inveniri possint. Disseruit de ea re Lagrangius in libello qui inscribitur. Sur que1ques prob1emes de l'Ana1yse de Diophante. Par M. de 1a Grange. — Mem. de l'Acad. Royale des sciences. 1777. Quæ materies quum latius quodammodo extendi posse videretur, equidem suadente Cl. Lejeune-Dirichlet denuo in eam inquirere apud animum constitui ».

En 1853, LEBESGUE qui ne connaissait pas alors les travaux de LAGRANGE et d'EULER, a donné, avec sa clarté et son élégance habituelles, la théorie complète de ces équations, mais en se bornant toujours au cas restreint que nous venons d'indiquer[1]. Nous commencerons par donner une solution plus simple des équations ci-dessus, et nous continuerons l'application de cette méthode, pour les équations dont les coefficients contiennent le facteur 3. La méthode que nous exposons s'applique encore, en supposant que les coefficients A, B, C de l'équation ne contiennent que le facteur premier 5 , ou le facteur premier 7 , avec le facteur premier 2 ; et même, lorsque l'on suppose que les coefficients contiennent à la fois plusieurs de ces facteurs premiers différents.

§ 1.

DES EQUATIONS

$$X^4 - 2Y^4 = \pm Z^2, \quad \text{ET} \quad X^4 + 8Y^4 = Z^2.$$

PREMIER CAS. — Si nous prenons d'abord le signe supérieur dans le premier groupe de ces équations, que nous désignerons par (1), (2) et (3), on déduit de l'équation

$$(1) \qquad X^4 - 2Y^4 = Z^2,$$

puisque l'on peut supposer X, Y, Z premiers entre eux, et, de plus, X et Z impairs,

$$(2) \qquad X^2 + Z = 2z^4, \quad X^2 - Z = 2^4w^4 , \quad Y = 2wz,$$

on admet les valeurs négatives de Z , afin de n'oublier aucune solution ; de plus, z et w sont premiers entre eux.

L'addition des deux premières des équations précédentes, donne l'équation de condition

$$(3) \qquad X^2 = z^4 + 8w^4,$$

qui représente la troisième des équations proposées ; on voit ainsi que

---

[1] « RESOLUTION DES EQUATIONS BIQUADRATIQUES. (1) (2) $z^2=x^4\pm2^my^4$, (3) $z^2=2^mx^4-y^4$, (4) (5) $2^mz^2=x^4\pm y^4$; PAR M. LEBESGUE, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux » (JOURNAL DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES, OU RECUEIL MENSUEL DE MEMOIRES, etc. Publié PAR JOSEPH LIOUVILLE, etc., TOME XVIII, – ANNEE 1853. PARIS. MALLET-BACHELIER, etc. 1853, pages 73-86).

la résolution de l'équation (1) ne dépend que de celle de l' équation (3). Mais on peut écrire cette dernière équation ainsi qu'il suit

$$(X - z^2)\,(X + z^2) = 8w^4\ ;$$

les deux facteurs du premier membre admettent seulement le facteur 2, comme diviseur commun ; on a donc, en désignant par x *et* y deux nombres entiers premiers entre eux, l'une ou l'autre des deux décompositions suivantes

$$X + z^2 = 2x^4, \quad X - z^2 = 4y^4, \quad w = xy\ ;$$

ou bien,

$$X - z^2 = 2x^4, \quad X + z^2 = 4y^4, \quad w = xy\ .$$

La première des décompositions précédentes nous conduit, par l'addition des facteurs $X + z^2$ et $X - z^2$, à l'équation

$$x^4 - 2y^4 = z^2,$$

identique avec l'équation (1), mais contenant des indéterminées plus petites ; la seconde décomposition conduit, au contraire, à l'équation

$$x^4 - 2y^4 = -z^2,$$

identique avec l'équation (2), et admettant la solution immédiate

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1,$$

Par conséquent, on déduit d'une solution quelconque (x, y, z) de l'équation (1), ou de l'équation (2), une solution nouvelle de l'équation (1), au moyen des formules

(A) $$X = x^4 + 2y^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 - 8x^4y^4,$$

qui coïncident avec les formules de LEBESGUE, données par la méthode de FERMAT (Chap. II, §. 1). Les premières solutions de l'équation (1) sont donc les suivantes

$x_1 = 3$	$x_2 = 113,$	$x_3 = \ldots\ldots\ 2626\ 21633,$	
$y_1 = 3$	$y_2 = 84,$	$y_3 = \ldots\ldots\ 1512\ 45528,$	
$z_1 = 3$	$z_2 = 7967,$	$z_3 = 60\ 91245\ 60651\ 82847,$	....

et sont déduites de la solution immédiate de l'équation (2) ; chacune des solutions de l'équation (2) donne encore une série indéfinie de solutions, premières entre elles, de l'équation (1), et dans chacune desquelles y_n, est égal au produit de 2^n par un nombre impair.

SECOND CAS. — Pour résoudre l'équation (2), on pose, en désignant par u et v deux nouvelles indéterminées entières,

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + z), \qquad v = \frac{1}{2}(x^2 - z),$$

et l'on obtient l'équation de condition

(4) $$u^2 + v^2 = y^4.$$

Il est facile de résoudre complètement cette équation, qui représente l'expression analytique du problème de trouver un triangle rectangle dont les côtés sont exprimés en nombres entiers, et tels que l'hypoténuse soit égale à un carré parfait. En général, on résout l'équation du triangle en nombre entiers

$$b^2 + c^2 = a^2$$

par les formules

$$b = p^2 - q^2, \qquad c = 2pq, \qquad a = p^2 + q^2,$$

dans lesquelles p et q désignent deux nombres arbitraires, premiers entre eux ; nous aurons donc, dans le cas présent,

$$u = p^2 - q^2, \qquad v = 2pq, \qquad y^2 = p^2 + q^2,$$

les inconnues p et q ne sont plus arbitraires, mais sont soumises à la dernière équation ; puisque l'on obtient de même

$$p = r^2 - s^2, \qquad q = 2rs, \qquad y = r^2 + s^2$$

il en résulte, pour l'équation (4), la solution complète

$$u = (r^2 - s^2)^2 - 4\,r^2s^2, \qquad v = 4rs(r^2 - s^2)^2, \qquad y = r^2 + s^2,$$

dans laquelle r et s désignent deux nombres quelconques.

On obtiendrait par le même procédé, la résolution de l'équation $u^2+v^2=y^8$, et plus généralement, la résolution complète de l'équation

$$u^2 + v^2 = y^{2^n}$$

en nombres entiers, quel que soit l'entier n [1].

Pour résoudre complètement l'équation (2), il faut remarquer que les valeurs de u et v données ci-dessus ne sont pas arbitraires, puisque leur somme est égale à x^2 ; on a donc

$$r^4 + s^4 - 6r^2s^2 + 4rs(r^2 - s^2) = x^2.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(r^2 + 2rs - s^2)^2 - 8r^2s^2 = x^2,$$

et donne, par la décomposition en facteurs

$$r^2+2rs-s^2+x=2g^2, \qquad r^2+2rs-s^2-x=4h^2, \qquad rs=gh\ ;$$

on admet de cette façon les valeurs négatives de x ; on en déduit le système

$$r^2+2rs-s^2 = g^2+2h^2, \qquad rs=gh.$$

Pour résoudre ce système, nous poserons en désignant par m une quantité rationnelle,

[1] TRAITE ELEMENTAIRE D'ALGEBRE AVEC UN GRAND NOMBRE D'EXERCICES SUIVI DES SOLUTIONS DE CES EXERCICES PAR JOSEPH BERTRAND. PARIS, LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET C^{ie}, 1850, page 244, lig. 10-25.

$$g = mr, \qquad s = mh\ ;$$

l'élimination de g et de s donne l'équation quadratique

$$m^2(r^2 + h^2) - 2mrh + 2h^2 - r^2 = 0.$$

Pour que la valeur de m soit rationnelle, nous poserons l'équation de condition suivante, obtenue en égalant la quantité placée sous le radical, dans la valeur de m, à un carré parfait :

$$r^4 - 2h^4 = \mathrm{U}^2,$$

et nous aurons

$$m = \frac{rh \pm \mathrm{U}}{r^2 + h^2}\ .$$

L'équation de condition précédente en r, h, U ne diffère pas de l'équation (1). En conséquence, on satisfait d'une manière générale, à l'équation

$$(2) \qquad \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{Y}^4 = -\mathrm{Z}^2,$$

en nombres entiers, à l'aide des formules

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \mathrm{X} = x^2(xy+z)^2 - 2y^2(x^2+y^2)^2, \\ \mathrm{Y} = x^2(x^2+y^2)^2 + 2y^2(xy+z)^2, \\ \mathrm{Z} = [x^4(x^2-y^2) - 2y^4(x^2+y^2) - 2xyz(x^2+2y^2)]^2 - 8x^2y^2(xy+z)^2(x^2+y^2)^2. \end{cases}$$

x, y, z désignant une solution quelconque de l'équation (1), et z ayant successivement le signe + , et le signe – . On déduit ainsi de la solution x_1 , y_1, z_1, les deux solutions de l'équation (2),

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{X}_1 = \quad 1, \\ \mathrm{Y}_1 = \ \ 13, \\ \mathrm{Z}_1 = 239, \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \mathrm{X}'_1 = \ldots 1343, \\ \mathrm{Y}'_1 = \ldots 1525, \\ \mathrm{Z}'_1 = 27\,50257\ ; \end{array}\right.$$

Inversement, de chacune des solutions de cette équation (2), on déduit une série de solutions de l'équation (1) ; on a ainsi au moyen de X_1, Y_1, et Z_1,

$$\left|\begin{array}{l} x'_1 = \ldots\ldots 57123, \\ y'_1 = \ldots\ldots\ 6214, \\ z'_1 = 32625\,80153\ ; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x''_1 = 10650\,39335\,57156\,21873, \\ y''_1 = \ldots\ldots\ldots \\ z''_1 = \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et ainsi de suite, inversement de chacune de ces solutions ; on déduira de nouvelles valeurs de l'équation (2) ; on tire, par exemple, de x'_1, y'_1, z'_1,

$$\left| \begin{array}{l} X_1'' = 5\ 70577\ 12360\ 38721, \\ Y_1'' = 7\ 65824\ 64576\ 72229, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

etc. ; on remarquera que nous avons désigné les solutions de l'équation (1) par des petites lettres, et celles de l'équation (2) par des grandes lettres.

Quant à l'équation obtenue en remplaçant z par z^2 , EULER a démontré, que si A, B, C ne contiennent que le facteur premier 2, l'équation

$$Ax^4 + By^4 = Cz^4$$

n'a, en dehors des solutions dans lesquelles l'une des inconnues est nulle, que la solution

$$1^4 - 2.1^4 = -1^4.$$

Ce résultat peut se déduire de la formule (4) et des deux formules précédentes; en effet, en remplaçant z par z^2 , on a

$$u^2+v^2=y^4 , \quad u+v=x^2 , \quad u-v=z^2 ,$$

et, par suite, en multipliant, on en conclurait que la différence u^4-v^4 des bicarrés de u et v serait un carré parfait ; ce qui est impossible, si v n'est pas nul, d'après le *théorème de Fibonacci* sur les nombres congruents (Chap. II, n.° 1), énoncé et démontré par FERMAT, sous la forme que nous avons indiquée plus haut.

§ 2.

DE LA CLASSIFICATION DES EQUATIONS BIQUADRATIQUES DES FORMES CONSIDEREES.

Si dans les équations proposées

$$AX^4 + BY^4 = \pm CZ^2 ,$$

on pose $X = mZ$, et si l'on résout ensuite l'équation par rapport à Z, on obtient une équation de condition, en exprimant que la valeur de Z doit être rationnelle ; on a ainsi à résoudre une nouvelle équation, qui est la suivante, en prenant X, Y, Z comme indéterminées

$$C^2X^4 - 4ABY^4 = Z^2 ;$$

cette équation donne de même, successivement

$$X^4 + 4ABC^2Y^4 = Z^2, \qquad X^4 - ABC^2Y^4 = Z^2.$$

D'après cela, il est facile de classer les équations biquadratiques de la forme proposée, en groupes dans lesquels la résolution de l'une d'elles donnera la résolution de toutes les autres. C'est d'après ce principe que nous avons classé, le plus souvent, les équations biquadratiques dont nous avons donné la solution, dans les paragraphes suivants.

Nous ferons encore observer que nous avons dû souvent passer sous silence, un grand nombre d'équations des formes considérées ; il arrive en effet, que, dans beaucoup de cas, l'on aperçoit presque immédiatement l'impossibilité de ces équations, par le calcul des résidus de leurs divers termes, suivant les modules 3 et 8.

§ 3.

DES EQUATIONS

$$4X^4 - Y^4 = 3Z^2, \quad \text{ET} \quad 9X^4 - Y^4 = 8Z^2.$$

La première de ces équations donne immédiatement, par la décomposition en facteurs,

$$(2X^2 - Y^2)(2X^2 + Y^2) = 3Z^2,$$

et puisque le premier facteur n'est jamais divisible par 3, on a, en désignant par U et V deux nombres premiers entre eux,

(1) $$2X^2-Y^2=U^2, \quad 2X^2+Y^2=3V^2, \quad Z=UV.$$

La seconde équation conduit de même à la décomposition

$$3X^2-Y^2=2U^2, \quad 3X^2+Y^2=4V^2, \quad Z=UV \ ;$$

l'addition et la soustraction des deux premières équations de la ligne précédente donnent

$$2U^2 + V^2 = 3X^2, \qquad 2U^2 - V^2 = Y^2,$$

et nous retrouvons ainsi le système (1).

Par conséquent, on ramène la résolution des deux équations proposées dans ce paragraphe, à la résolution du système unique que nous écrirons ainsi

(1) $$2\,X^2 - Y^2 = U^2, \qquad 2X^2 + Y^2 = 3V^2.$$

Ce système admet, tout d'abord, ainsi que les équations proposées, la solution immédiate

$$X = Y = U = V = Z = 1.$$

La première équation du système (1) se résout, comme l'on sait, en la mettant sous la forme,

$$\left(\frac{U+V}{2}\right)^2 + \left(\frac{U-V}{2}\right)^2 = X^2 \ ;$$

on la ramène ainsi à l'équation fondamentale de la théorie des triangles rectangles en nombres entiers.

On a donc

$$X = a^2 + b^2, \quad \frac{U+V}{2} = 2ab, \quad \frac{U+V}{2} = a^2 - b^2,$$

et, par suite,

$$X = a^2 + b^2, \quad Y = a^2 - b^2 - 2ab, \quad U = a^2 - b^2 + 2ab\ ;$$

portons ces valeurs dans la seconde équation du système (1) nous obtenons l'équation de condition

$$3(a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2) = 3V.$$

Cette équation, déjà obtenue [Chap. II, § 5, formule (4)[1]], nous montre que le produit $ab(a^2 - b^2)$ doit être divisible par 3, et nous pouvons supposer, à cause de la symétrie, que b est divisible par ce facteur. En remplaçant b par $3b$ on a donc à résoudre l'équation

$$(a^2 + 9b^2)^2 + 4ab(a^2 - 9b^2) = V^2,$$

ou, en développant,

$$a^4 + 4a^3b + 18a^2b^2 - 36ab^3 + 81b^4 = V^2,$$

équation biquadratique que l'on peut traiter par la méthode de FERMAT.

Pour résoudre complètement cette équation, on remarque que le premier membre est décomposable en un produit de deux facteurs impairs

$$c = a^2 - 2ab + 3b^2, \quad \text{et} \quad d = a^2 + 6ab + 27b^2\ ;$$

mais on a :

$$3c + d = 4X, \quad 3c - d = 2U, \quad cd = V^2,$$

et, par voie d'addition et de soustraction,

$$2X + U = 3c, \quad 2X - U = d\ ;$$

ces formules font voir que c et d sont premiers entre eux, puisque X et U le sont aussi ; donc, ces deux facteurs sont des carrés V_1^2 et V_2^2, et l'on a le système

$$(a - b)^2 + 2b^2 = V_1^2, \quad (a + 3b)^2 + 2(3b)^2 = V_2^2,$$

La première de ces équations donne, par la décomposition en facteurs

$$a - b = \pm (r^2 - 2s^2), \quad b = 2rs,$$

et la seconde donne, de même,

$$a + 3b = \pm(r_1^2 - 2s_1^2), \quad 3b = 2r_1s_1\ .$$

Il nous reste à identifier les valeurs de a et de b, tirées de chacune de ces équations. En prenant le signe + dans la valeur de $a - b$, et le signe − dans celle de $a + 3b$, on a

$$r^2 + 2rs - 2s^2 = 2s_1^2 - 2r_1s_1 - r_1^2, \quad \text{et} \quad 3rs = r_1s_1\ .$$

Mais, si nous posons,

[1] Voyez ci-dessus, page 56, lig. 15.

$$r_1 = 3mr\ , \quad \text{et} \quad s = ms_1\ ,$$

nous obtenons par l'élimination de r_1 et de s, l'équation quadratique

$$m^2(2s_1^2 - 9r^2) - 8mrs_1 + 2s_1^2 - r^2 = 0\ .$$

La valeur de m tirée de cette équation doit être rationnelle ; on doit donc avoir

$$16r^2 s_1^2 - (2s_1^2 - r^2)(2s_1^2 - 9r^2) = \mathrm{H}^2\ ;$$

ou encore

$$36r^2 s_1^2 - 9r^4 - 4s_1^4 = \mathrm{H}^2\ ;$$

cette équation est impossible, suivant le module 3. En prenant, au contraire, le signe $-$ dans la valeur de $a - b$, et le signe $+$, dans celle de $a + 3b$, on obtient encore, en changeant les signes de s et de s_1, les mêmes équations, et, par suite, les mêmes conclusions.

Mais, si nous prenons en même temps le signe $+$, ou le signe $-$ dans les valeurs de $a - b$ et de $a + 3b$, nous arrivons aux deux équations

$$r^2 + 2rs - 2s^2 = r_1^2 - 2r_1s_1 - 2s_1^2 \qquad \text{et} \qquad 3rs = r_1s_1.$$

En opérant comme ci-dessus, on obtient pour m la valeur

$$m = \frac{-4rs_1 \pm \mathrm{H}}{9r^2 + 2s_1^2}\,,$$

avec l'équation de condition

$$(3r^2 + 6s_1^2)^2 - 32s_1^4 = \mathrm{H}^2.$$

On déduit de cette équation

$$(3r^2 + 6s_1^2 \pm \mathrm{H})(3r^2 + 6s_1^2 \mp \mathrm{H}) = 32s_1^4\,;$$

donc, en désignant par u et x deux nombres premiers entre eux dont le produit est égal à s_1, on a

$$3r^2 + 6s_1^2 \pm \mathrm{H} = 2u^4, \qquad 3r^2 + 6s_1^2 \mp \mathrm{H} = (2x)^4\ .$$

Il en résulte l'équation de condition

$$u^4 + 8x^4 = 3r^2 + 6s_1^2\ ;$$

en remplacent s_1, par ux, l'équation précédente peut être écrite ainsi qu'il suit

$$(u^2 - 3x^2)^2 - x^4 = 3r^2.$$

La décomposition du premier membre de cette équation en deux facteurs donne

$$(u^2 - 2x^2)\,(u^2 - 4x^2) = 3r^2\ ;$$

on a donc, puisque ces facteurs sont premiers entre eux,

$$u^2 - 2x^2 = \pm\, y^2, \qquad u^2 - 4x^2 = \pm\, 3v^2, \qquad r = vy\ .$$

Si l'on prend simultanément les signes supérieurs, on obtient l'équation

$$u^2 - 4x^2 = 3v^2,$$

impossible suivant le module 4 ; et, en prenant les signes inférieurs, on trouve

$$2x^2 - y^2 = u^2, \qquad 2x^2 + y^2 = 3v^2,$$

cest-à-dire, un système identique au système proposé, mais contenant des indéterminées beaucoup plus petites.

Ainsi donc, *en résumé*, d'une première solution (x, y, u, v) du système proposé (1), on obtient deux solutions nouvelles (X, Y, U, V), à l'aide des formules

$$\mathrm{X} = (r^2 + 2rs - 2s^2)^2 + 36r^2s^2, \quad \mathrm{Y} = (r^2 + 8rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2,$$
$$\mathrm{U} = (r^2 - 4rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2, \quad \mathrm{V} = (r^2 + 2s^2)(2r^2 + 9s^2),$$

dans lesquelles r et s sont des quantités auxiliaires que l'on suppose débarassées des facteurs communs, et fournies par les équations

$$r = vy\,[2u^2x^2 + 9v^2y^2], \qquad s = ux\,[4uvwz \pm (u^4 - 8y^4)].$$

On a ainsi, pour seconde solution

(2) $\qquad x_2 = 37, \quad y_2 = 23, \quad u_2 = 47, \quad v_2 = 3\times 11$;

puis

(3) $\qquad x_3=52487, \ y_3=40573, \ u_3=23183, \ v_3=139\times 323$;

ensuite

$$(4)\ \begin{cases} x_4 = 2\ 53642\ 20918\ 55129, & y_4 = 3\ 58647\ 03316\ 69969, \\ u_4 = 6406\ 72783\ 29889, & v_4 = (9\times 45\ 97777)\times(11\times 64\ 33883). \end{cases}$$

L'application de la méthode de FERMAT donne les solutions (2) et (4), mais ne donne pas la solution (3).[1]

§ 4.

DES EQUATIONS
$4\mathrm{X}^4 - \mathrm{Y}^4 = 3\mathrm{Z}^4$ ET $9\mathrm{X}^4 - \mathrm{Y}^4 = 8\mathrm{Z}^4$.

Nous allons faire voir que ces équations n'admettent d'autre solution rationnelle que celle dans laquelle toutes les inconnues sont, en valeur absolue, égales à l'unité.

Nous pouvons encore démontrer, que le système (1), que nous avons considéré dans le paragraphe précédent, n'admet d'autre solution, que celle qui correspond à des valeurs égales des indéterminées, lorsque l'on remplace U ou Y par un carré. En effet, on tire de la valeur de U ou de Y, exprimée primitivement en fonctions de a et de $3b$, l'équation suivante dans laquelle a peut avoir un signe quelconque

$$a^2 + 6ab - 9b^2 = \mathrm{U}^2,$$

[1] Le calcul de ces solutions est dû à M. *A. FIQUET.*

On ne peut supposer le second membre égal à $-\mathrm{U}^2$, car l'équation est alors impossible suivant le module 3. On tire de la précédente

$$a + 3b = \pm (g^2 + 2h^2), \quad \text{et} \quad 3b = 2gh\ ;$$

en identifiant les valenrs de a et de b déduites des équations précédentes, avec celles que nous avons obtenues ci-dessus, nous avons, en prenant, en même temps, dans ces équations, les signes supérieurs

$$g^2 + 2gh + 2h^2 = r^2 + 2rs - 2s^2, \quad \text{et} \quad gh = 8rs\ ,$$

Posons encore, comme précédemment,

$$g = 3mr, \quad \text{et} \quad s = mh\ ,$$

nous arrivons, par l'élimination de g et de s, à l'équation quadratique en m

$$m^2(9r^2 + 2h^2) - 4mrh + 2h^2 - r^2 = 0.$$

et, puisque la valeur de m tirée de cette équation doit être rationnelle, nous obtenons en égalant à un carré, la quantité placée sous le radical dans la valeur de m, l'équation

$$9r^4 - 12r^2h^2 - 4h^4 = \mathrm{K}^2,$$

impossible suivant le module 3, excepté dans le cas de $r = 0$, qui donne $\mathrm{U} = 1$.

Si nous prenons maintenant le signe $+$ dans la valeur de $a - b$, et le signe $-$ dans celle de $a + 3b$, nous obtenons

$$g^2 + 2h^2 = 2s^2 + 4rs - r^2,$$

et par suite, comme ci-dessus,

$$4\mathrm{h}^4 - 12h^2r^2 - 9r^4 = \mathrm{K}^2,$$

équation impossible suivant le module 4, puisque r ne peut-être pair, en exceptant la solution $r = 0$, qui donne encore $\mathrm{U} = 1$.

Donc *les équations*

$$4\mathrm{X}^4 - \mathrm{Y}^4 = 3\mathrm{Z}^4, \quad \textit{et} \quad 9\mathrm{X}^4 - \mathrm{Y}^4 = 8\mathrm{Z}^4,$$

n'ont, en dehors de la solution immédiate, aucune solution rationnelle.

Il en est de même de presque toutes les équations biquadratiques que j'ai étudiées ; ce résultat est bien différent de celui que l'on obtient pour les équations cubiques à trois termes qui, ainsi que nous l'avons vu, ont une série indéfinie de solutions, dans les cas où elles sont possibles.

Cependant, il n'en est pas toujours ainsi, et, par exemple, l'équation

$$3x^4 + 13y^4 = z^4\ ,$$

admet les deux solutions

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 2\ ; \qquad x = 3,\ y = 1,\ z = 4.$$

§ 5.

DES EQUATIONS
$$X^4 - 36Y^4 = Z^2, \quad \text{ET} \quad X^4 - Y^4 = 24Z^2.$$

La première des équations proposées donne, par la décomposition en facteurs,

$$(X^2 - 6Y^2)(X^2 + 6Y^2) = Z^2.$$

Les deux facteurs du premier membre sont premiers entre eux, et désignant par U et V deux nombres premiers entre eux dont le produit égale Z, on obtient ainsi le système

$$X^2 - 6Y^2 = U^2, \qquad X^2 + 6Y^2 = V^2,$$

que nous avons résolu complètement au chapitre sur les nombres congruents.

La seconde équation conduit au même système.

§ 6.

DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS
$$3X^4 - Y^4 = 2Z^2, \quad 4X^4 - 3Y^4 = Z^2, \quad 3X^4 + Y^4 = Z^2, \quad X^4 - 12Y^4 = Z^2.$$

Nous ne considèrerons que la première de ces équations, attendu que chacune des trois autres peut se ramener à la résolution de cette équation, par la méthode de la décomposition en facteurs. On trouvera ainsi, par exemple, pour l'équation

$$3X^4 + Y^4 = Z^2,$$

les solutions suivantes

1,	1,	2,
2,	1,	7,
3,	11,	122,
28,	47,	2593,
8052,	7199,	12259565,
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

Soit donc l'équation

(1) $$3X^4 - Y^4 = 2Z^2\ ;$$

il est facile de voir que, dans cette équation, X, Y, et Z sont impairs, et que l'on doit poser

(2) $$X^2 = p^2 + 2(p - q)^2, \qquad Y^2 = 3p^2 - 2q^2.$$

On tire de la première de ces deux équations

$$X + p = 2x^2, \quad X - p = 4r^2, \quad p - q = 2rx,$$

et par suite

$$X = x^2 + 2r^2, \quad p = x^2 - 2r^2, \quad q = x^2 - 2rx - 2r^2\ ;$$

ces valeurs, déduites de la première équation du système (2), sont générales, en laissant aux inconnues p, q, r, x un signe indéterminé. Si l'on porte ces valeurs dans la seconde équation de ce système, on obtient l'équation biquadratique

$$x^4 + 8rx^3 - 12r^2x^2 - 16r^3x + 4r^4 = \mathrm{Y}^2,$$

qui rentre, à la fois, dans les deux premiers cas de l'équation générale considérée par FERMAT. On peut donc se servir de la méthode que nous avons rappelée dans le chapitre précédent, pour trouver une série indéfinie de solutions, mais il est préférable de résoudre généralement cette équation de la manière suivante. Pour cela, nous l'écrirons sous la forme

$$(x^2 + 4rx - 2r^2)^2 - 24r^2x^2 = \mathrm{Y}^2,$$

et, par suite, en admettant les valeurs négatives de Y, nous obtiendrons le système

(3) $$x^2 + 4rx - 2r^2 + \mathrm{Y} = \pm 12s^2, \quad x^2 + 4rx - 2r^2 - \mathrm{Y} = \pm 2y^2\ ;$$

ou encore

(4) $$x^2 + 4rx - 2r^2 + \mathrm{Y} = \pm 4s^2, \quad x^2 + 4rx - 2r^2 - \mathrm{Y} = \pm 6y^2\ ;$$

avec la condition commune

$$rx = sy$$

Nous poserons, comme précédemment,

$$s = mx, \quad \text{et} \quad r = my,$$

et nous obtiendrons les résultats suivants :

PREMIER CAS. En prenant les signes supérieurs dans le système (3), il vient

$$2m^2(3x^2 + y^2) - 4mxy + y^2 - x^2 = 0.$$

On en déduit

$$m = \frac{xy \pm z}{3x^2 + y^2},$$

et la condition

$$3x^4 - y^4 = 2z^2,$$

identique avec l'équation proposée, qui admet, d'ailleurs, la solution immédiate

$$x_0 = y_0 = z_0 = \pm 1.$$

Par conséquent, on déduira d'une solution quelconque (x, y, z) de l'équation (1), une double série indéfinie de solutions nouvelles, à l'aide des formules

$$\mathrm{X} = x^2(3x^2 + y^2)^2 + 2y(xy \pm z)^2,$$
$$\mathrm{Y} = 6x^2(xy \pm z)^2 - y^2(3x^2+y^2)^2,$$
$$\mathrm{Z} = 12x^2y^2(3x^2+y^2)^2(xy \pm z)^2 - [x^2(3x^2+y^2)^2 - 2xy(3x^2+y^2)(xy \pm z) - 2y^2(xy \pm z)^2]^2.$$

On a ainsi, pour les premières solutions de l'équation (1), les valeurs

1,	1,	1,
3,	1,	11,
19,	25,	13,
449,	167,	2 46121,
. . . . .	. . . . .	. . . . .

et ainsi de suite. Mais on devra, dans le calcul, supprimer, tout d'abord, les facteurs communs aux deux expressions

$$3x^2 + y^2, \quad \text{et} \quad xy \pm z.$$

En prenant, au contraire, les signes inférieurs, dans les équations du système (3), on arrive à l'équation

$$3x^4 - y^4 = -2z^2,$$

impossible suivant le module 3.

DEUXIEME CAS. En prenant les signes supérieurs dans le système (4), il vient

$$2m^2(x^2 + y^2) - 4mxy + 3y^2 - x^2 = 0,$$

et, puisque la valeur de m tirée de cette équation doit être rationnelle, il faut que l'on ait la condition

$$y^4 - 3x^4 = 2z^2,$$

équation encore impossible suivant le module 3 ; mais, si l'on prend les signes inférieurs dans les équations du système (4), on obtient

$$2m^2(x^2 - y^2) + 4mxy + x^2 + 3y^2 = 0,$$

et, par suite

$$m = \frac{xy \pm z}{3x^2 - y^2},$$

avec l'équation de condition

$$3y^4 - x^4 = 2z^2,$$

identique avec l'équation proposée.

Ainsi d'une solution (x, y, z) de l'équation (1), on déduit deux solutions nouvelles, à l'aide des formules

$$X = 2x^2(xy\pm z)^2+2y(x^2-y^2)^2,$$
$$Y = 3x^2(x^2-y^2)^2-2y^2(2y\pm z)^2,$$
$$Z = [2x^2(xy\pm z)^2+2xy(xy\pm z)(x^2-y^2)-y^2(x^2-y^2)^2]^2-12(xy\pm z)^2(x^2-y^2)^2x^2y^2.$$

Cependant ces formules ne donnent pas de solutions nouvelles pour l'équation (1).

Il résulte d'ailleurs de cette discussion que les équations de ce paragraphe sont impossibles à résoudre en nombres entiers, si l'on remplace dans le second membre Z par Z^2, et si l'on ne tient pas compte des solutions immédiates des trois premières d'entre elles.

§ 7.

DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS

$$3X^4 - 2Y^4 = Z^2 \qquad X^4 - 6Y^4 = Z^2 \qquad X^4 + 24Y^4 = Z^2.$$

Nous ne considérerons que la première de ces équations

(1) $$3X^4 - 2Y^4 = Z^2$$

car nous verrons, dans la suite, que les deux autres équations se ramènent immédiatement à la précédente, par la décomposition en facteurs. On a, d'abord

(2) $$X^2 = p^2 + 2(p-q)^2, \quad Y^2 = q^2 - 3(p-q)^2$$

et, par suite, on tire de la première équation de ce système

(3) $$p = x^2 - 2r^2, \qquad p - q = 2rx\ ;$$

ou encore

(3 bis) $$p = 2x^2 - r^2, \qquad p - q = 2rx\ ;$$

et de la seconde équation du système (2)

(4) $$\pm\, 2q = y^2 + 3s^2, \qquad p - q = sy\ ;$$

ou aussi

(4 bis) $$\pm\, q = y^2 + 3s^2, \qquad p - q = 2sy.$$

On a encore $rx = sy$ et si l'on pose

$$s = mx \quad \text{et} \quad r = my$$

on obtient, par l'identification des valeurs de p et de q déduites des équations (3) et (4 bis), en prenant le signe supérieur

$$m = \frac{-xy \pm z}{3x^2 + 2y^2},$$

avec l'équation de condition

$$3x^4 - 2y^4 = z^2,$$

identique avec la proposée ; si l'on prend au contraire le signe inférieur, on obtient une équation impossible suivant le module 3. Donc, on déduit d'une solution (x, y, z) de l'équation (1), une série indéfinie de solutions nouvelles, à l'aide des formules

$$X = 2x^2(xy \pm z)^2 + y^2(2x^2 + 3y^2)^2,$$
$$Y = x^2(2x^2 + 3y^2)^2 - 3y^2(xy \pm z)^2,$$
$$Z = 3[x^2(3x^2 + 2y^2)^2 - 2y^2(xy \pm z)^2]^2$$
$$-2[x^2(3x^2+2y^2)^2-2xy(xy \pm z)(3x^2+2y^2) - 2y^2(xy \pm z)^2]^2,$$

et ainsi, on trouve pour les premières solutions de l'équation (1), les valeurs suivantes

1,	1,	1,
33,	13,	1871,
28577,	8843,	14101 40689,
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

et ainsi de suite. L'identification des valeurs de p et de q tirées des systèmes (3) et (4) donne

$$2(x^2 - 2r^2) = 2sy \pm (3s^2 + y^2) \quad \text{et} \quad 2rx = sy\ ;$$

si l'on pose $s = 2mx$ et $r = my$, on obtient, avec le signe supérieur, une équation quadratique en x qui donne, sous le radical, une équation impossible suivant le module 3 ; on a, avec le signe inférieur

$$m = \frac{-xy \mp z}{2(y^2 - 3x^2)}\ ,$$

et l'équation de condition

$$y^4 - 6x^4 = z^2.$$

En traitant cette équation par la méthode de décomposition en facteurs, on retrouve cette même équation ou aussi l'équation (1). Cette dernière a pour solutions,

5,	2,	23,
721,	460,	39841,
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

On en déduit aisément la résolution de l'équation (1) ; d'ailleurs on n'obtient pas de nouvelles solutions de cette équation par ce moyen, ou encore, par les autres manières d'identifier les valeurs de p et q déduites des systèmes (3), (4), (3 bis) et (4 bis).

§ 8.

DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS

$$X^4 + 2Y^4 = 3Z^2, \quad X^4 + 18Y^4 = Z^2, \quad 9X^4 - 8Y^4 = Z^2, \quad X^4 - 72Y^4 = Z^2.$$

Dans la première des équations précédentes, X et Z sont impairs; on peut poser

$$Z = p^2 + 2q^2,$$

et l'on a les deux équations

$$X^2 = (p - 2q)^2 - 6q^2, \qquad Y^2 = (p + q)^2 - 3q^2 ;$$

de la première, on tire

(A) $$X = 3r^2 - 2s^2, \quad p - 2q = 3r^2 + 2s^2, \quad q = rs,$$

ou bien

(A_1) $$X = 6r^2 - s^2, \quad p - 2q = 6r^2 + s^2, \quad q = 2rs ;$$

et de la seconde

(B) $$2Y = 3u^2 - v^2, \quad 2(p + q) = 3u^2 + v^2, \quad q = uv,$$

ou encore

(B_1) $$Y = 3u^2 - v^2, \quad p + q = 3u^2 + v^2, \quad q = 2uv.$$

L'identification des valeurs de p et de q déduites de chacun des systèmes précédents conduit, comme dans les paragraphes précédents, à la résolution de l'équation

$$18r^4 + V^4 = U^2,$$

qui est la seconde des équations proposées, et qui se ramène, de deux manières différentes, à la première. En effet, on a,

$$U \pm V^2 = \pm 18z^4, \qquad U \mp V^2 = \pm (2t)^4,$$

ou bien

$$U \pm V^2 = \pm 9(2z)^4, \qquad U \mp V^2 = \pm 2t^4 ;$$

et, en ne conservant que les équations possibles suivant le module 3, on obtient l'une ou l'autre des équations

(1) $$9z^4 - 8t^4 = v^2, \qquad t^4 - 72z^4 = v^2.$$

La première de ces équations donne

$$3z^2 \pm v = 2x^4, \quad 3z^2 \mp v = 4y^4, \quad t = xy,$$

et, en additionnant, on retrouve la première équation

$$x^4 + 2y^4 = 3z^2.$$

Donc, d'une première solution de cette équation, on déduira deux solutions nouvelles, à l'aide des formules

$$m = 6xyz(x^4 - 2y^4) \pm (9z^4 + 8x^4y^4),$$
$$n = (x^4 - 2y^4)^2 - 24x^2y^2z^2,$$
$$X = 24m^2x^2y^2z^2 - n^2(x^4 - 2y^4)^2,$$
$$Y = 12n^2x^2y^2z^2 - m^2(x^4 - 2y^4)^2,$$
$$Z = [12n^2x^2y^2z^2 + m^2(x^4 - 2y^4)^2 - 4mnxyz]^2 + 32m^2n^2x^2y^2z^2(x^4 - 2y^4)^2.$$

Ainsi la solution immédiate $x = y = z = 1$, donne les deux solutions

$$x = 23,\quad y = 11,\quad z = 321,$$
$$x = 2375,\quad y = 6227,\quad z = 31827137.$$

La seconde des équations (1) donne encore par la méthode de décomposition en facteurs, en ne conservant que les équations possibles suivant le module 8,

$$t^2 \pm v = 2x^4,\quad t^2 \mp v = 36y^4,\quad z = xy,$$

et, par suite, on trouve l'équation

$$x^4 + 18y^4 = t^2,$$

qui revient encore à la première.

§ 9.

DE LA RESOLUTION DES EQUATIONS

$$27X^4 - 2Y^4 = Z^2 \qquad X^4 - 36Y^4 = Z^2 \qquad X^4 + 216Y^4 = Z^2.$$

Les deux dernières équations se ramènent à la première par la décomposition en facteurs. Si l'on pose, dans la première,

$$X = r^2 + 2y^2,$$

on obtient, par identification,

$$r^4 - 20r^3y - 12r^2y^2 + 40ry^3 + 4y^4 = Y^2,$$

ou bien

$$(r^2 - 10ry - 2y^2)^2 - 108r^2y^2 = Y^2,$$

et, par suite,

$$r^2 - 10ry - 2y^2 \pm Y = \pm 54x^2,\quad r^2 - 10ry - 2y^2 \mp Y = \pm 2q^2,\quad qx = ry,$$

ou, en additionnant

$$(1)\qquad r^2 - 10ry - 2y^2 = \pm(27x^2 + q^2).$$

Si l'on prend les signes supérieurs, on a, en posant

$$r = mx,\quad \text{et}\quad q = my\ ,$$

l'équation

$$m^2(x^2 - y^2) - 10mxy = 27x^2 + 2y^2,$$

d'où on tire

$$m = \frac{5xy \pm z}{x^2 - y^2}\ ,$$

avec l'équation de condition

$$27x^4 - 2y^4 = z^2,$$

c'est-à-dire la première, des équations proposées. Ainsi d'une première solution de celle-ci, on obtient une double série indéfinie de solutions nouvelles à l'aide des formules

$$X = (5xy \pm z)^2 y^2 + 2(x^2 - y^2)^2 x^2,$$
$$Y = 27(x^2 - y^2)^2 y^2 - (5xy \pm z)^2 x^2,$$
$$Z = \;.\;\;.\;\;.\;\;.$$

Les solutions les plus simples sont

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 5,$$
$$x = 1041, \quad y = 1859, \quad z = 2796715.$$
$$.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.$$

On traitera de même l'équation (1), en prenant les signes inférieurs.

CHAPITRE IV.

SUR LA SOMMATION DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES ENTIERS ET DES NOMBRES IMPAIRS.

La somme des carrés des premiers nombres entiers a été donnée par ARCHIMEDE[1], et appliquée par lui à la détermination de l'aire du segment de la parabole et de la spirale. On la trouve aussi sans démonstration dans la GA'NITA'D'HYAYA de BRAHMEGUPTA[2],dans le LILAWATI de BHASCARA ACHARYA[3], dans le LIBER ABBACI DE LEONARD

---

[1] ARCHIMEDIS QUÆ SUPERSUNT OMNIA CUM EUTOCII ASCALONITÆ COMMENTARIIS. EX RECENSIONE JOSEPHI TORELLI, etc. OXONII, E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO. MDCCXCII, page 216, col. 1, lig. 11-57, col. 2, lig. 11-57, page 227, page 228, col. 1, lig. 1-12, col. 2, lig. 1-12, ARCHIMEDIS DE HELICIBUS PROP. X. THEOR. — OEUVRES D'ARCHIMEDE. TRADUITES LITTERALEMENT, AVEC UN COMMENTAIRE, PAR F. PEYRARD, etc. A. PARIS, etc. M DCCC VII, page 228, lig. 22-29, pages 229-231, page 232, lig. 1-8, page 491, lig. 9-17, page 492, page 493, lig. 1-5. — OEUVRES D'ARCHIMEDE TRADUITES LITTERALEMENT, AVEC UN COMMENTAIRE, PAR F. PEYRARD, etc. SECONDE EDITION *TOME II*, etc. 1844, page 24, lig. 9-25, pages 25-29, page 30, lig. 1-15, page 391, lig. 8-22, pages 392-393. — ORIGINE, TRASPORTO IN ITALIA, PRIMI PROGRESSI IN ESSA DELL'ALGEBRA, *STORIA CRITICA*, etc. DI D. PIETRO COSSALI C. R. V*OLUME I.*, etc., page 158, lig. 2-31, page 159, lig. 1-30. — *ELOGIO* DI FRANCESCO MAUROLICO, *SCRITTO* DALL'ABATE DOMENICO SCINA, PALERMO, *DALLA REALE STAMPERIA*. 1808, page 129, lig. 7-28, page 130, lig. 1-3, NOTE (43). — « C'est à Archimède qu'on doit les formules pour la sommation d'autres séries importantes que les progressions géométriques, savoir la suite des carrés des nombres naturels et celle des sinus d'arcs en progression par différence » (ELEMENTS DE CALCUL INFINITESIMAL, PAR M. DUHAMEL, Membre de l'Institut (Académie des Sciences). DEUXIEME EDITION. — TOME PREMIER. PARIS, MALLET-BACHELIER, etc. 1860, etc., page 33, lig. 14-17).

[2] ALGEBRA, WITH ARITHMETIC AND MENSURATION, FROM THE SANSCRIT OF *BRAHMEGUPTA AND BASCARA*, etc., page 293, lig. 3-4. SECTION III, par. 20.

[3] *LILAWATI :* OR A TREATISE ON Arithmetic and Geometry, BY *BHASCARA-ACHARYA*. TRANSLATED FROM THE ORIGINAL SANSCRIT BY JOHN TAYLOR, etc. *BOMBAY ;* PRINTED AT THE COURIER PRESS BY SAMUEL RANS. 1816, page 60, lig. 6-8, 11-13, 25-29, page 61, lig. 14-22. — ALGEBRA, WITH ARITHMETIC AND MENSURATION, FROM THE SANSCRIT OF *BRAHMAGUPTA AND BASCARA*, etc., page 51, lig. 5-8. CHAPTER V, par. 115. — TRACTS ON, MATHEMATICAL AND PHILOSOPHICAL SUBJECTS, etc. IN THREE VOLUMES BY CHARLES HUTTON, etc. VOL. II. LONDON, etc. 1812, page 156, lig. 23-28. — CORRESPONDANCE SUR L'ECOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, A L'USAGE DES ELEVES DE CETTE ECOLE ; PAR M.

DE PISE[1] dans le Talkhys d'IBN ALBANNA[2], dans un traité d'arithmétique d'ALKALÇADI[3], dans « la Clé du calcul » par DJAMCHID BEN MAS'OUD[4], dans d'autres traités d'arithmétique arabes[5], et dans la « Summa de arithmetica » di FRA LUCA PACIOLI[6]. On en trouve des dé-

---

HACHETTE, Janvier 1814. — Janvier 1816. TOME TROISIEME. PARIS, etc. 1816. N.° 111. *Janvier* 1816, page 5, lig. 10-15.

[1] SCRITTI DI LEONARDO PISANO, MATEMATICO DEL SECOLO DECIMOTERZO ; PUBBLICATI DA BALDASSARRE BONCOMPAGNI, etc. VOLUME I, LEONARDI PISANI LIBER ABBACI, ROMA, etc. page 167, lig. 25-3l. — ORIGINE, TRASPORTO IN ITALIA, PRIMI PROGRESSI IN ESSA DELL'ALGEBRA, *STORIA CRITICA* DI NUOVE DISQUISIZIONI ANALITICHE E METAFISICHE DI D. PIETRO COSSALI C. R. *VOLUME* I, etc., page 155, lig. 21-29, page 156, lig. 1-8. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHEMATIQUES EN ITALIE, DEPUIS LA RENAISSANCE DES LETTRES JUSQU'A LA FIN DU DIX SEPTIEME SIECLE. PAR GUILLAUME LIBRI. TOME SECOND. A PARIS, etc. 1838, page 41, lig. 7-10, 13-15. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHEMATIQUES EN ITALIE, etc. PAR GUILLAUME LIBRI. TOME SECOND. DEUXIEME EDITION HALLE IN 8°. H. W. SCHMIDT. 1865, page 41, lig. 7-10, 13-15. — STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE IN ITALIA, DI GUGLIELMO LIBRI VERSIONE DI LUIGI MASIERI, etc. TOMO SECONDO. Milano, etc. 1842, page 21, lig. 1-4, 10-12. — SCRITTI INEDITI DEL P. D. PIETRO COSSALI, CHIERICO REGOLARE TEATINO, etc. SEGUITI DA UN'APPENDICE CONTENENTE QUATRO LETTERE, DIRETTE AL MEDESIMO P. COSSALI, etc. 1857, page 23, lig. 31-35.

[2] ATTI DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE NUOVI LINCEI, etc. TOMO XVII. - ANNO XVII. (1863-64). ROMA 1864, etc., page 293, lig. 3-4 , 12-24. — LE TALKHYS D'IBN ALBANNA, PUBLIE ET TRADUIT (D'APRES UN MS. INEDIT DE LA BIBLIOTHEQUE BODLEYENNE, COTE MARSH. 371, N° CCXVII DU CATALOGUE D'URI) PAR ARISTIDE MARRE, PROFESSEUR, OFFICIER DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, ROME, IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHEMATIQUES ET PHYSIQUES, etc. 1865, page 5, lig. 3-4 , 12-24. — JOURNAL DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES, OU RECUEIL, etc, Publié PAR JOSEPH LIOUVILLE, etc. DEUXIEME SERIE - TOME X - ANNEE 1865, etc. PARIS, etc. 1865, page 122, lig. 5-17. AVRIL 1865.

[3] ATTI DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE'NUOVI LINCEI, ETC. TOMO XII. - ANNO XII. (1858 -59). ROMA 1859. TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI. Piazza Poli n. 91, page 433, lig. 3-61, 28, SESSIONE VII[a] DEL 5 GIUGNO 1859. — RECHERCHES SUR PLUSIEURS OUVRAGES DE LEONARD DE PISE, etc. PAR M. F. WOEPCKE, etc. *PREMIERE PARTIE Extraits et traductions d'ouvrages arabes inédits.* Traduction du traité d'arithmétique d'Aboûl Haçan Ali Ben Mohammed Alkalcàdi. Extrait des *Àtti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei.* Tomo XII, Sessione V. del 3 aprile 1859, e Sessione VII del 5 giugno 1859. *ROME*, etc. 1859, page 62, lig. 12-19.

[4] ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA. PUBBLICATI DA BARNABA TORTOLINI etc. TOMO VI, etc., page 247, lig. 9-17, N° 3. — PASSAGES RELATIFS A DES SOMMATIONS DE SERIES DE CUBES, EXTRAITS DE DEUX MANUSCRITS ARABES INEDITS DU BRITISH MUSEUM DE LONDRES COTES N[os] CCCCXVII ET CCCCXIX DES MANUSCRITS ORIENTAUX (N° 7469 ET 7470 DES MANUSCRITS ADDITIONNELS) PAR M. F. WOEPCKE, etc. ROME etc. 1864, page 24, lig. 13-21, 36. — JOURNAL DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES, OU RECUEIL, etc. Publié PAR JOSEPH LIOUVILLE, etc. DEUXIEME SERIE - TOME X - ANNEE 1865, etc., page 115, lig. 2-11, AVRIL 1865. — PASSAGES RELATIFS A DES SOMMATIONS DE SERIES DE CUBES EXTRAITS DE DEUX MANUSCRITS ARABES INEDITS DU *BRITISH MUSEUM* DE LONDRES, PAR M. F. WOEPCKE, SUIVIS D'EXTRAITS DU TALKHYS D'IBN ALBANNA, TRADUIT PAR M. AR. MARRE. Extrait du J*ournal de Mathématiques pures et appliquées,* tome X, 2e série. PARIS, etc. 1865, page 35, lig. 2-11.

[5] ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA PUBBLICATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. E Compilati da E. BETTI *a Pisa*. F. BRIOSCHI *a Pavia*. A. GENOCCHI *a Torino*. B. TORTOLINI *a Roma*. (In continuazione agli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche) TOMO V. ROMA, etc. 1863, page 149. lig. 2,6-34, page 167, lig. 19-25, page 171, lig. 25-30, 37-38, page 172, lig. 1-8. — PASSAGES RELATIFS A DES SOMMATIONS DE SERIES DE CUBES EXTRAITS DE TROIS MANUSCRITS ARABES INEDITS DE LA BIBLIOTHEQUE IMPERIALE DE PARIS. COTES N[OS] 951/2, 951/3 et 952 DU SUPPLEMENT ARABE. PAR M. F. WOEPCKE, etc. ROME, etc. 1864 (In 4°, de 42 pages, dans la seconde desquels on lit : « EXTRAIT DU TOME V. *N.°* 3. DES *ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA* »), page 7, lig. 25-33, page 16, lig. 1-8, page 24, lig. 17-23, page 29, lig. 25-30, 37-38, page 10, lig. 1-8.

[6] Suma de Arithmetica, etc., feuillet 52[ème], numéroté 44, *recto*, lig. 40-50. — Summa de Arithmetica, etc., feuillet 52[ème], numéroté 44, recto, lig. 44-50.

monstrations dans le Fakhri d'ALKARHKI[1] dans le « Liber quadratorum » de LEONARD DE PISE[2], dans le « liber secundus » des « ARITHMETICORUM » de MAUROLICUS[3] et dans l'APPENDIX de BACHET sur le « LIBER DE MVLTANGVLIS NVMERIS » de DIOPHANTE[4] ; mais la démonstration de FIBONACCI est particulièrement remarquable par son élégance, ainsi que l'a fait observer M. GENOCCHI[5] ; d'autre part, M. F. NAPOLI dans un Mémoire sur la vie et les travaux de MAUROLICUS, insiste sur la démonstration simple et ingénieuse du géomètre de Messine[6].

La somme des cubes des n premiers nombres entiers a été donnée par BRAHMEGUPTA, géomètre du septième siècle, dans le *Sphuta-*

---

[1] EXTRAIT DU FAKHRI, TRAITE D'ALGEBRE PAR ABOU BEKR MOHAMMED BEN ALHAÇAN ALKARKHI. (MANUSCRIT 952, SUPPLEMENT ARABE DE LA BIBLIOTHEQUE IMPERIALE PRECEDE D'UN MEMOIRE SUR L'ALGEBRE INDETERMINEE CHEZ LES ARABES, PAR M. WOEPCKE, PARIS, etc., M DCCC LIII, page 60, lig. 12-13.

[2] TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc., page,75, lig. 23-28, pages 76-77, page 78, lig. 1-4. — OPUSCOLI DI LEONARDO PISANO, etc., page 75, lig. 23-28, pages 76-77, page 78, lig. 1-4. — SCRITTI DI LEONARDO PISANO, etc. VOLUME II. LEONARDI PISANI PRACTICA GEOMETRIÆ ED OPUSCOLI, etc., page 262, lig, 8-43. page 263, page 264, lig. 1-17. — ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE COMIPILATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. *TOMO SESTO*, etc., page 248, lig. 19-26, page 249, lig. 1-26. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI, etc. *NOTE ANALITICHE*, etc., page 57, lig. 20-25, page 58, lig. 1-26.

[3] D. FRANCISCI MAVROLYCI ABBATIS MESSANENSIS. Mathematici Celeberrimi *ARITHMETICORUM LIBRI DVO*, etc. CVM PRIVILEGIO VENETIIS, Apud Franciscum Franciscium Senensem. MDLXXV, page 120, lig. 20-41, page 121, lig. 1-l3. — *ELOGIO* DI FRANCESCO MAUROLICO, *SCRITTO* DALL'ABATE DOMENICO SCINA', etc., page 43, lig. 16-25, page 166, lig. 14-29, page 167, lig. 1-3. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHEMATIQUES EN ITALIE, etc. PAR GUILLAUME LIBRI, TOME TROISIEME. PARIS, etc.. 1840, page 111, lig. 17-21, page 112, lig. 1-7, 21-23. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHEMATIQUES EN ITALIE, etc. PAR GUILLAUME LIBRI. TOME TROISIEME, DEUXIEME EDITION HALLE in 8°., H. W. SCHMIDT. 1865, page 111, lig. 17-20, page 112, lig, 1-7, 4-25.

[4] DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX, *ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS* LIBER VNVS. *Nunc primum Græcé & Latine editi, atque obsolutissimis, Commentariis illustrati.* AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZERIACO SEBVSIANO, V. C. LVTETIÆ PARISIORVM, Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Jacoboea, sub Ciconis. M. DC. XXI. *CVM PRIVILEGIO REGIS*, page 45, lig. 37-40, page 46, lig. 1-16. — DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORUM LIBRI SEX , etc. *CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI F. C. & observationibus D. P. de* FERMAT *Senatoris Tolosani*, etc., page 32, lig. 36-52.

[5] Cet illustre géomètre dit (ANNALI SCIENZE MATEMATICAF E FISICHE. COMPILATI DA BARNABA TORTOLINI, etc., *TOMO SESTO*, etc., page 251, lig. 4-9, 26-28. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI etc. page 60, lig. 1-11) :

> « Comme osservò il Cossali, la somma di questa progressione di quadrati è data da Archimede nella propos. 10 del trattato delle Spirali, e la troviam pure nelle opere di Maurolico e di Bachet*, ma è molto notabile l'eleganza della forma di cui la espresse Leonardo Pisano e quella della sua dimostrazione.
>
> * Cossali, *Storia dell'Algebra*, vol. I, pag. 158 ; *Bachet Diophanti Arithm. Appendices*, Lib, II, Propos. 11. (Tolosa 1670, pag. 32). »

[6] On lit en effet dans ce mémoire (BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, etc. TOMO IX. GENNAIO 1876. ROMA, etc. 1876, pag. 7, lig. 10-16. — SCRITTI INEDITI DI FRANCESCO MAUROLICO. PUBBLICATI DAL PROF. FEDERICO NAPOLI, etc. ROMA, etc. 1876, page 9, lig. 10-16.

> « Ciò non pertanto bisogna notare, che la somma dei quadrati dei numeri naturali, e quella dei cubi (i più difficili risultati di questo genere, ottenuti dal Maurolico), erano già conosciute. Archimede avea determinato geometricamente la somma dei quadrati, ed avea dimostrato la regola per trovarla ; questa somma, del pari che quella dei cubi, era stata pubblicata da F. Luca Pacioli, l'anno stesso della nascita del Maurolico ».

Sidd'hanta[1].

La somme des n premiers bicarrés a été donnée par DJAMCHID BEN MAS'OUD BEN MAHMOUD, le médecin, surnommé GHIYATH (EDDIN) ALQACHANI. On la trouve dans un manuscrit conservé au *British Museum,* et portant la date de l'année 997 de l'hégire (1589 ap. J.-C.). L'auteur fut un des astronomes qui prirent part à la rédaction des Tables d'OULOUG-BEG ; mais il mourut avant l'achèvement de cet ouvrage. On rencontre, en effet, dans la traduction de WOEPCKE, du manuscrit en question, le passage suivant[2] :

> « *Quatorzième règle*. Si nous désirons (connaître) la somme des carré-carrés des nombres suivant l'ordre à partir de l'unité, nous retranchons de la somme de ces nombres une unité et nous prenons constamment un cinquième (4) du reste. Nous l'ajoutons à la somme des dits nombres, et nous multiplions ce qui en provient par la somme des carrés des mêmes nombres. Il résultera la quantité cherchée (5).
>
> *Exemple*. Nous désirons additionner les carrés-carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous prenons la somme de ces nombres, ce qui est vingt et un. Nous en retranchons une unité, il reste vingt. Nous en prenons le cinquième ce qui est quatre. Nous l'ajoutons à vingt et un ; il provient vingt cinq. Nous multiplions cela par quatre-vingt onze ce qui est la somme des carrés des mêmes nombres. Il résulte deux mille deux cent soixante quinze.
>
> (4) Le texte ms. porte ici « un tiers ». Mais l'exemple qui suit prouve, que ce n'est qu'une erreur de copiste.
>
> (5) $$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\left[\frac{1}{5}\{1+2+3+\ldots+(n-1)+n-1\}+\{1+2+3+\ldots+n\}\right].$$
> $$\{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\}=\frac{1}{30}\{6n^5+15n^4+10n^2-n\}.$$ »

PIERRE DE FERMAT, dans une lettre adressée le 4 novembre 1636, à ROBERVAL[3] a donné cette somme. On lit en effet dans cette lettre[1] ;

---

[1] BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA, etc. TOMO VIII. ROMA, etc. 1875, page 51-62. — INTORNO AD UNA PROPRIETA'DE NUMERI DISPARI. NOTA DI B. BONCOMPAGNI, etc. ROMA, etc. 1875. — BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA, etc. TOMO IX. MARZO 1876, page 157-162). — SUR UN THEOREME DE L'ARITHMETIQUE INDIENNE PAR M. EDOUARD LUCAS, etc. EXTRAIT DU *BULLETTINO DI BLBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE.* TOME IX. MARS 1876. ROME, etc. 1876.

[2] ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA. PUBBLICATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. TOMO VI, etc., page 247, lig. 25-32, 40-41, page 248, lig. 1-5, N° 5. — PASSAGES RELATIFS A DES SOMMATIONS DE SERIES DE CUBES EXTRAITS DE DEUX MANUSCRITS ARABES INEDITS DU *BRITISH MUSEUM* DE LONDRES, etc. PAR M. F. WOEPCKE, etc., page 24, lig. 29-32, 38-39, page 25, lig. 1-9, 22=23. — JOURNAL DE MATHEMATIQUES, etc. OU RECUEIL, etc. Publié PAR JOSEPH LIOUVILLE, etc. DEUXIEME SERIE - TOME X. – ANNEE 1865, etc., page 116, lig. 1-9, 22-23, AVRIL 1865. — PASSAGES RELATIFS A DES SOMMATIONS DE SERIES DE CUBES, etc. extrait du Journal de *Mathématiques pures et appliquées*, tome X, 2e série, etc., page 35. lig. 20-23, 29-30, page 36, lig. 1-9, 22-24.

[3] Cette lettre imprimée dans le recueil intitulé « VARIA OPERA MATHEMATICA, D. PETRI DE FERMAT, SENATORIS TOLOSANI. Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam perti-

« MONSIEUR,

Me réservant à vous écrire une autre fois les défauts que j'ay trouvé dans vôtre demonstration & dans vôtre Livre imprimé, que j'espere vous faire advoüer par vos propres maximes, je me contenteray de répondre presentement aux autres points de vôtre Lettre, & premierement vous sçaurez que nous avons concouru au méme medium sur le sujet de la somme des deux quarrez rationaux commensurables en longueur appliquée au double de la somme des côtez, excedant d'une figure quarrée. Vous vous estes servy aussi d'un méme medium que moy en la quadrature des paraboles solides quarre-quarrez, & à l'infini ; mais vous supposez une chose vraye, de laquelle vous n'avez pas peut-étre la démonstration précise, qui est que la somme des quarrez est plus que le tiers du cube, qui a pour costé le costé du plus grand quarré la somme des cubes plus que le quart du quarré-quarré, la somme des quarré-quarrez plus qu'un cinquiéme du quarrecube, &c. Or pour démontrer cela generalement, il faut étant donné un nombre, in progressione naturali, trouver la somme, non seulement de tous les quarrez & cubes, ce que les Autheurs qui ont écrit ont déja fait, mais encore la somme des quarre-quarrez, quarre-cubes, &c. ce que personne que je sçache n'a encore trouvé, & pourtant cette connoissance est belle & de grand usage, & n'est pas des plus aisées, j'en suis venu à bout avec beaucoup de peine.

En voicy un exemple. Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in quadratum trianguli numerorum, & à producto demas summam quadratorum à singulis fiet summa quadrato-quadratorum quintupla. Il semble que Bachet, dans son traitté de numeris multangulis, n'a pas voulu tàter ces questions apres avoir fait celle des quarrez & des cubes : je seray bien-aise que vous vous exerciez pour trouver la méthode generale, pour voir si nous rencontrerons. En tout cas je vous offre tout ce que j'y ay fait, qui comprend entierement tout ce qui se petit dire sur cette matière. Voicy cependant une très-belle proposition, qui peut-être vous y servira, au moins c'est par son moyen que j'en suis venu à bout. C'est une règle que j'ay trouvée pour donner la somme non seulement des triangles, ce qui a été fait par Bacbet & les autres, mais encore des pyramides, triangulo-triangulorum, &c. à l'infini, voicy la proposition ».

Le procédé de sommation indiqué par FERMAT ne diffère pas du procédé ordinaire du calcul inverse des différences, qui consiste à

---

nentibus scriptæ. TOLOSÆ, Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta. Collegium PP. Societatis JESU. M.DC.LXXIX » (page 146, page 141 , lig. 1-28) — La même lettre a dans ce recueil (page 146, lig. 1-2) le titre suivant « *Lettre de M. de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris* » et (page 146, lig. 3) la date suivante « Du 4. Novembre 1636 ». En 1861 MM. Friedländer ont fait paraître à Berlin une reproduction identique à cette édition. A la première page de cette reproduction (lig. 14-13), on lit :

« Nouo inuento usi iterum expresserunt. R. Friedlander & Filius.
BEROLINI MDCCCLXI. »

[1] VARIA OPERA MATHEMATICA. D. PETRI DE FERMAT, etc., page 146, lig. 1-32, 38-39, page 25, lig. 1-9, 22-23.

remplacer x^4, par une somme de factorielles, dont on trouve aisément le total, à l'aide d'une propriété du triangle arithmétique. On remarquera d'ailleurs que la formule déduite du procédé de l'auteur arabe est préférable, dans l'application, à celle de FERMAT, puisque l'on voit de suite que la somme des n premiers bicarrés, est divisible algébriquement par la somme des n premiers carrés ; mais nous devons ajouter cependant que c'est à FERMAT que l'on doit, le premier, le principe de la méthode générale pour trouver les sommes des puissances semblables des premiers nombres entiers.

§ 1.

Considérons, en général, une fonction

$$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$$

ordonnée suivant les puissances de x, et égale à la différence première d'une fonction $f(x)$ pour une différence de l'argument égale à l'unité ; soit, par exemple,

$$\Delta f(x) = \mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1} + \ldots. + \mathrm{L}x^0 ;$$

si, dans cette égalité, nous remplaçons successivement x par 1, 2, 3, ..., $(x-1)$, et, si nous faisons la somme des égalités obtenues, nous avons

$$f(x) - f(1) = \mathrm{AS}_m + \mathrm{BS}_{m-1} + \ldots. + \mathrm{LS}_0,$$

ou encore, la formule symbolique

$$\Delta f(\mathrm{S}) = f(x) - f(1), \tag{1}$$

dans laquelle nous devons remplacer les exposants 0, 1, 2, . . . m de S par des indices, S_m désignant la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des $(x-1)$ premiers nombres entiers, et l'on a

$$\mathrm{S}_0 = x - 1.$$

Si nous supposons, en particulier, $f(x) = x^n$, nous avons

$$(\mathrm{S} + 1)^n - \mathrm{S}^n = x^n - 1, \tag{2}$$

formule bien connue ; si nous supposons $f(x) = (x - 1)^n$, nous obtenons la formule

$$\mathrm{S}^n - (\mathrm{S} - 1)^n = (x - 1)^n, \tag{3}$$

que nous avons démontrée d'une autre manière[1]

On peut, à l'aide des formules (2) et (3), calculer S_m, par voie de récurrence, lorsque l'on connaît S_{m-1}, S_{m-2}, ... Si l'on fait $x = 0$ et $x = 1$ dans la formule (2), on en déduit que S_n est divisible algébriquement par le produit $x(x - 1)$ ou $2\mathrm{S}_1$. On a encore, par addition et soustraction, les formules

[1] NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES. JOURNAL etc. REDIGE PAR MM. GERONO, etc., ET CH. BRRISSE, etc. DEUXIEME SERIE, *TOME QUATORZIEME* etc. PARIS, etc. 1875, page 488. lig. 20-23, pages 489-490, NOVEMBRE 1875.

(4) $$(S+1)^n - (S-1)^n = x^n + (x-1)^n - 1,$$
(5) $$(S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n = x^n - (x-1)^n - 1,$$
qui permettent de calculer les sommes S de deux en deux. On obtient d'ailleurs à l'aide des formules (2), (3), (4) ou (5), les résultats suivants :

$$S_1 = \frac{1}{2}x^2 \mp \frac{1}{2}x,$$

$$S_2 = \frac{1}{3}x^3 \mp \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x,$$

$$S_3 = \frac{1}{4}x^4 \mp \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2,$$

$$S_4 = \frac{1}{5}x^5 \mp \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x,$$

$$S_5 = \frac{1}{6}x^6 \mp \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2,$$

$$S_6 = \frac{1}{7}x^7 \mp \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x,$$

$$S_7 = \frac{1}{8}x^8 \mp \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2,$$

$$S_8 = \frac{1}{9}x^9 \mp \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{30}x,$$

$$S_9 = \frac{1}{10}x^{10} \mp \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{20}x^2,$$

$$S_{10} = \frac{1}{11}x^{11} \mp \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x,$$

$$S_{11} = \frac{1}{12}x^{12} \mp \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 - \frac{11}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^2,$$

. . . .

Le signe – se rapporte à la somme des puissances des $(x-1)$ premiers nombres entiers, et le signe + à la somme des puissances des x premiers.

On peut, par le même procédé, obtenir un grand nombre d'autres formules ; si l'on fait $f(x) = (x+1)^n$, on a
(6) $$(S+2)^n - (S+1)^n = (x+1)^n - 2^n ;$$
en combinant cette formule avec (2), on a encore
(7) $$(S+2)^n - S^n = (x+1)^n + x^n - 2^n - 1 ;$$
soit, maintenant, $f(\mathrm{x}) = (x-2)^n$, on déduit de (1)

(8) $$(S-1)^n - (S-2)^n = (x-2)^n - (-1)^n,$$

et, en combinant cette formule avec (3),

(9) $$S^n - (S-2)^n = (x-2)^n + (x-1)^n - (-1)^n.$$

Les formules (7) et (9) donnent, par addition et soustraction, deux formules qui permettent encore de calculer les sommes S de deux en deux. On peut aussi employer, dans ce but, la suivante, déduite de la relation fondamentale (1) par l'hypothèse $f(x) = (x - \frac{1}{2})^n$,

(10) $$(2S+1)^n - (2S-1)^n = (2x-1)^n - 1 .$$

Cette formule a été donnée par M. GILBERT, au moyen de l'analyse infinitésimale[1]. Mais le procédé que nous avons employé est plus simple, et peut aussi servir à la sommation des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique. D'ailleurs, il résulte immédiatement de la formule (10) que S_n est une fonction paire ou impaire de $x - \frac{1}{2}$,suivant que n est impair ou pair, et l'on a ainsi

$$S_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Il résulte encore des formules précédentes que S_{2n+1} est divisible par S_3 ou S_1^2.

§ 2.

Si l'on pose

$$nS_{n-1}(x) = \varphi(x),$$

le polynôme $\varphi(x)$ de degré n satisfait à la relation

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = nx^{n-1},$$

et l'on aussi

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 0.$$

On peut donc poser l'égalité symbolique

(11) $$nS_{n-1} = (x+B)^n - B^n,$$

dans laquelle on remplacera, après le développement, les exposants de B par des indices ; les nombres B_n représentent des coefficients numériques que l'on détermine par la condition $\varphi(1) = 0$, ou

(12) $$(1+B)^n - B^n = 0,$$

ou, plus généralement encore par l'identité

[1] NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES, JOURNAL, etc. PAR MM. GERONO, etc. ET J. BOURGET, etc. DEUXIEME SERIE. *TOME HUITIEME*, etc. PARIS, etc. 1869, page 434, lig. 22-27, pages 435-437, OCTOBRE 1867.

$$(x + \mathrm{B} + 1)^n - (x + \mathrm{B})^n = nx^{n-1} \tag{13}$$

Si, d'ailleurs on remplace $f(x)$ par $\varphi(x)$ dans la formule (1), on en déduit cette conséquence importante que les coefficients B ne changent pas, lorsque l'on modifie l'indice de S sans changer celui de B.

Ces coefficients numériques sont connus sous le nom de *Nombres de Bernoulli*. JACQUES BERNOULLI les introduisit, le premier, dans l'Analyse[1]. EULER s'en est occupé souvent ; il a montré que ces nombres jouent un grand rôle dans plusieurs questions, et notamment dans la sommation des séries. Nous avons, du reste, à cause de la simplification des formules, modifié les diverses notations habituellement en usage. Nous nous bornerons à faire remarquer que l'on obtient la notation de LACROIX[2], employée par M. CATALAN dans un grand nombre de mémoires sur ce sujet, en retranchant une unité de l'indice dans la notation présente.

Les nombres de Bernoulli sont respectivement égaux aux coefficients de $\dfrac{z^n}{1.\,2.\,3.\,\ldots n}$ dans le développement en série de la fonction

$$y = \frac{z}{e^z - 1},$$

de telle sorte que l'on a $\mathrm{B}_p = \dfrac{\mathrm{d}^p y_0}{\mathrm{d}z^p}$, ou encore, l'identité symbolique

$$\frac{z}{e^z - 1} = e^{\mathrm{B}z}. \tag{14}$$

CAUCHY a démontré que le développement de y est toujours convergent, pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 2π.

Pour le calcul des nombres de Bernoulli, on se sert de la formule (12), ou des suivantes obtenues en faisant successivement dans la formule (13), x égal à $+1$, -1 ou $-\dfrac{1}{2}$:

---

[1] JACOBI BERNOULLI. Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal. MATHEMATICI CELEBERRIMI, ARS CONJECTANDI, OPUS POSTHUMUM. *Accedit* TRACTATUS DE SERIEBUS INFINITIS, ET EPISTOLA Gàllicè scripta DE LUDO PILÆ RETICULARIS BASILÆ, Impensis THURNISIORUM, Fratrum. M DCC XIII, page 97, lig. 8-30, page 98, page 99, lig. 1-5. — THE DOCTRINE OF *PERMUTATIONS AND COMBINATIONS*, BEING AN ESSENTIAL AND FUNDAMENTAL PART OF THE DOCTRINE OF CHANCES, As it is delivered by MR. JAMES BERNOULLI, etc. TOGETHER WITH SOME OTHER USEFUL MATHEMATICAL TRACTS PUBLISHED BY FRANCIS MASERES, ESQ. CURSITOR BARON OF THE COURT OF EXCHEQUER. LONDON : SOLD BY B. AND J. WHITE, FLEET-STREET, 1795, page 32, page 33, lig. 1-21.

[2] TRAITE DES DIFFERENCES ET DES SERIES, Faisant suite au Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, PARIS. F. LACROIX. A PARIS, Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins. AN VIII=1800, page 105, lig. 5-26, page 106, page 107, lig. 1-3, n° 919. — TRAITE DU CALCUL DIFFERENTIEL ET DU CALCUL INTEGRAL, PAR S. F. LACROIX. SECONDE EDITION, REVUE ET AUGMENTEE, TOME TROISIEME, etc. PARIS, etc. 1819, page 84 , lig. 10-30, page 85, lig. 1-3, n° 952, page 113, lig 4-25, page 114, lig. 1-7, n.[i] 975, 976.

(15) $$(B + 2)^n - (B + 1)^n = n,$$
(16) $$B^n - (B - 1)^n = n(-1)^{n-1},$$
(17) $$(2B + 1)^n - (2B - 1)^n = 2\,n(-1)^{n-1}.$$

Cette dernière relation fait voir que l'on a, généralement, $B_{2n+1}=0$

On a d'ailleurs,

$$B_0 = +1,\quad B_1 = -\frac{1}{2},\quad B_2 = +\frac{1}{6},\quad B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$B_6 = +\frac{1}{42},\quad B_8 = -\frac{1}{30},\quad B_{10} = +\frac{5}{66},\quad B_{12} = -\frac{691}{2730},$$

$$B_{14} = +\frac{7}{6},\quad B_{16} = -\frac{3617}{510},\quad B_{18} = +\frac{43867}{798},\quad B_{20} = -\frac{174611}{330},$$

$$B_{22} = +\frac{84513}{138},\quad B_{24} = -\frac{236364091}{2730},\quad B_{26} = +\frac{8553103}{6},\quad B_{28} = -\frac{23749461029}{870},$$

$$B_{30} = +\frac{8615841276005}{14322},\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

Si l'on remarque encore que S_{2n} s'annule pour $x = \frac{1}{2}$, on a, puisque B_{2n+1}, est nul :

(18) $$(2B + 1)^{2n+1} = 0.$$

On tire encore des formules précédentes la formule

(19) $$\frac{dS_n}{dx} = nS_{n-1} + B_n,$$

qui conduit à des théorèmes connus, et qui permet de calculer rapidement S_n par voie d'intégration, en déterminant chaque fois la constante.

Mais les formules précédentes rentrent toutes dans une formule plus générale que nous allons établir. Si l'on remarque, en effet, que $\frac{S_n(x)}{x}$ devient égal à B_n lorsque x s'annule pour n différent de zéro, on obtient dans la formule (1) mise sous la forme

$$\frac{f(S+1) - f(S) - S_0[f(1) - f(0)]}{x} = \frac{f(x) - f(1) - (x-1)[f(1) - f(0)]}{x}$$

et faisant ensuite x égal à zéro, le résultat

(20) $$f(B+1) - f(B) = f'(0),$$

ou plus généralement, en remplaçant $f(x)$ *par* $\varphi(x + z)$,

(21) $$\varphi(B + 1 + z) - \varphi(B + z) = \varphi'(Z).$$

Nous pouvons obtenir, au moyen de cette formule, toutes celles qui servent au calcul des nombres de Bernoulli, et en découvrir de nouvelles.

1.° Soit $f(x)$ successivement égal *à* e^{xz}, $\sin(x-\frac{1}{2})z$, $\cos(x-\frac{1}{2})z$ on trouve

$$(22)\qquad e^{\mathrm{B}z}=\frac{z}{e^z-1}\,,\quad \cos \mathrm{B}z=\frac{z}{2}\cot g\,\frac{z}{2}\,,\quad \sin \mathrm{B}z=-\frac{z}{2}\,.$$

2.° Soit

$$f(x) = (x + z)(x + z + 1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x + z + n),$$

on a

$$(23)\qquad \frac{\mathrm{B}+z+1}{z}\cdot\frac{\mathrm{B}+z+2}{z+1}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{\mathrm{B}+z+n}{z+n-1}=\frac{z+n}{n+1}\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{z+n}\right],$$

et, pour z = 1 ,

$$(24)\qquad \frac{\mathrm{B}+2}{1}\cdot\frac{\mathrm{B}+3}{2}\cdot\ .\ .\ .\ \cdot\frac{\mathrm{B}+n}{n-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{n}.$$

En se servant de l'élégante formule

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdot\cdot\cdot+\frac{1}{2n},$$

due à M.r CATALAN [1], on peut exprimer le dernier membre de celle-ci , eu fonction des nombres de Bernoulli. On a ainsi

$$(25)\qquad \frac{B+n+2}{n+1}\cdot\frac{B+n+3}{n+2}\cdot\cdot\cdot\frac{B+2n}{2n-1}=2\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdot\cdot\cdot-\frac{1}{2n}\right].$$

3.

La formule bien connue

$$-\operatorname{tang}\frac{z}{2} = 2\operatorname{cotg} z - \operatorname{cotg}\frac{z}{2},$$

nous donne, en remplaçant cotg z et cotg $\frac{z}{2}$ par leurs valeurs dédui-tes de la seconde des formules (22),

$$-\operatorname{tang}\frac{z}{2}=2[\cos 2\mathrm{B}z-\cos\ \mathrm{B}z]\ ,$$

et, en posant

$$(26)\qquad \mathrm{P}_n = 2(1 - 2^n)\mathrm{B}_n\ ,$$

[1] BULLETINS DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE. QUARANTE ET UNIEME ANNEE — 2me SER. T. XXXIV. BRUXELLES, F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE. 1872, page 26, lig. 11-16. N° 7. *Séance* du 6 *juillet* 1872. — *NOTE* SUR UNE FORMULE DE M. BOTESU, DE IASSY (ROUMANIE) ; PAR E. CATALAN, ASSOCIE DE L'ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE. (In 4° de 11 pages, dans la seconde desquelles on lit : « Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 2me série, t. XXXIV, n.° 7 ; juillet 1872. Bruxelles, impr. de F. HAYEZ »), page 3, lig. 5-10.

Nous obtenons

$$z \operatorname{tang}\frac{z}{2} = \cos Pz$$

en ayant soin de remplacer P_0 par 0. M. CATALAN[1] a fait remarquer l'importance des coefficients P_n, entiers et impairs, considérés par EULER, et dont le calcul est préférable à celui des nombres bernoulliens.

En retranchant membre à membre les identités

$$(2B + 1)^{2n+1} = (2B)^{2n+1}, \qquad (B + 1)^{2n+1} = B^{2n+1},$$

on a la relation de récurrence

$$(2P + 1)^{2n+1} = P^{2n+1}. \tag{27}$$

Mais on a, plus généralement, la formule suivante

$$f(P+z+1)-f(P+z-1) = 2[f'(z)-f'(z-1)], \tag{28}$$

et, en faisant $f(x) = (x - 1)^n$, on a

$$(P+1)^n-(P-1)^n = 2n(-1)^n. \tag{29}$$

On en déduit immédiatement que $P_{2n+1} = 0$; de plus ,

$$P_0 = 0,\ P_1 = 1,\ P_2 = +1,\ P_4 = -1,\ P_6 = +3,\ P_8 = -17,\ P_{10} = 155,\ \ldots$$

L'équation générale (28) donne pour $z = 1$

$$f(P + 2) - f(P) = 2[f'(1) - f'(0)]. \tag{30}$$

Faisons successivement $f(x)$ égal à e^{xz}, $\sin(x-1)z$, $\cos(x-1)z$, . .., nous obtenons

$$e^{Pz} = \frac{2z}{1+e^z}, \quad \cos Pz = z \operatorname{tg}\frac{z}{2}, \quad \sin Pz = z. \tag{31}$$

Soit enfin

$$f(x) = (x + z + 1)(x + z + 3)\ .\ .\ .\ .\ (x + z + 2n - 1),$$

il vient

---

[1] COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME CINQUANTE-QUATRIEME. JANVIER-JUIN 1862. PARIS, MALLET-BACHELIER, etc., 1860. page 1033, lig. 1-11, N° 18, SEANCE DU LUNDI 12 MAI 1862. — ACADEMIE ROYALE DE BELGIQUE. (EXTRAIT DU TOME XXXVII DES MEMOIRES). SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI ET D'EULER ET SUR QUELQUES INTEGRALES DEFINIES, PAR E. CATALAN. (Mémoire présenté à la classe des sciences le 6 avril 1867.) (In 4° de 19 pages, dans la seconde desquelles on lit : « Bruxelles, imp. de M. HAYEZ »), page 3, lig. 5-13, page 4, page 5, lig. 1-6. — Les nombres P ont été considérés avant M. CATALAN, par M. GENOCCHI (ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE COMPILATI DA BERNABA TORTOLINI, etc. TOMO TERZO. ROMA, etc. 1852, pages 395-405, SETTEMBRE 1852. — INTORNO ALL'ESPRESSIONE GENERALE DE'NUMERI BERNULLIANI. *NOTA* DEL SIGNOR AVVOCATO ANGELO GENOCCHI. ESTRATTA DAGLI ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE. PUBBLICATI IN ROMA. SETTEMBRE 1852. ROMA TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI. 1852. In 8.°, de 13 pages), qui en a déduit des conséquences importantes au sujet de la résolution de l'équation indéterminé $A^n + B^n + C^n = 0$, en nombres entiers.

$$(32)\qquad \begin{aligned} &n(\mathrm{P}+z+3)(\mathrm{P}+z+5)\ldots(\mathrm{P}+z+2n-1)\\ &=(z+2)(z+4)\ldots\ldots(z+2n)\left[\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+4}+\ldots+\frac{1}{z+2n}\right]\\ &-(z+1)(z+3)\ldots(z+2n-1)\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+3}+\ldots\frac{1}{z+2n-1}\right]. \end{aligned}$$

On déduit encore de l'identité

$$e^{\mathrm{P}z}(1+e^z)=2z,$$

et pour $n>1$, la relation symbolique

$$\mathrm{P}^n+(\mathrm{P}+1)^n=0.$$

Si l'on suppose n égal à $2q$, et si l'on admet que les coefficients P, d'indice inférieur à $2q$, sont entiers et impairs, on a la congruence

$$2\mathrm{P}_{2q}+2^q-2\equiv 0, \quad (\mathrm{Mod.}\ 2);$$

puisque la somme des coefficients d'ordre impair dans la puissance $2q$ du binôme est, en exceptant les extrêmes, égale à 2^q-2 ; donc P_{2q} est toujours entier et impair.

§ 4.

Considérons la série des x quantités

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_p,\ \ldots\ u_x,$$

et formons une table de multiplication en écrivant successivement les uns au dessous des autres, les produits des termes de la série précédente, par ceux de la série

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_p,\ \ldots,\ v_x,$$

la somme des termes de la table sera égale au produit des sommes des deux séries, que nous désignerons par U_x et V_x, ainsi qu'on le,voit, en faisant l'addition par lignes ou par colonnes.

Mais, d'autre part, si l'on prend la somme des p premiers termes de la table qui se trouvent dans la $p^{ième}$ ligne, et les $(p-1)$ premiers de la $p^{ième}$ colonne, on a, pour expression de leur somme,

$$u_p\mathrm{V}_p+v_p\mathrm{U}_p-u_pv_p;$$

par suite, en faisant la somme de ces expressions de $p=1$ *à* $p=x$, on retrouve la somme des termes de la table, et on a la formule

$$(33)\qquad \mathrm{U}_x\mathrm{V}_x-\sum_{p=1}^{p=x}(u_p\mathrm{V}_p+v_p\mathrm{U}_p)+\sum_{p=1}^{p=x}u_pv_p=0,$$

et, si l'on suppose $v_p=u_p$, on a

$$(34)\qquad \mathrm{U}_x^2-2\sum_{p=1}^{p=x}u_p\mathrm{U}_p+\sum_{p=1}^{p=x}u_p^2=0.$$

Si l'on fait, par exemple,

$$u_p=p(p+1)\ldots(p+a-1),$$

on a

$$\mathrm{U}_p = \frac{p(p+1)\,.\;.\;.\;.(p+a)}{a+1} \;,$$

et la formule (34) nous donne

$$\sum_{p=1}^{p=x}(2p+a-1)u_p^2 = (a+1)\mathrm{U}_x^2 \;.$$

Si l'on pose encore, dans la formule (34),

$$u_p = \frac{1}{p(p+1)\,.\,.\,.\,.(p+a-1)} \;,$$

on a

$$\mathrm{U}_p = \frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(a-1)} - \frac{1}{(p+1)(p+2)\,.\,.\,.\,(p+a-1)}\right] ,$$

et, par suite

$$\sum_{p=1}^{p=x}(2p+a-1)u_p^2 = \frac{2}{1.2\,.\,.\,.\,(a-1)}\;\mathrm{U}_x - (a-1)\mathrm{U}_x^2 \;.$$

De même, si 1'on fait, dans la formule (33),

$$u_p = \frac{1}{p(p+1)} \;, \qquad \text{et} \qquad v_p = a^p,$$

on déduit

$$\sum_{p=1}^{p=x}\frac{a^p}{p(p+1)}\left[1+(a-1)p^2\right] = \frac{x}{x+1}a^{x+1} \;,$$

et, par exemple, en supposant $a = \frac{3}{4}$, et faisant augmenter x indéfiniment

$$2 = \frac{1.5}{3.4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2.6}{4.5}\cdot\frac{3^2}{4^2} + \frac{3.7}{5.6}\cdot\frac{3^3}{4^3} + \frac{4.8}{6.7}\cdot\frac{3^4}{4^4} + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

On a encore, en effectuant le quotient de $1 + (a-1)p^2$ par $p(p+1)$, la formule

$$\sum_{p=1}^{p=x}\frac{1-p(a-1)}{p(p-1)}a^p = a - \frac{a^{x+1}}{x+1} \;,$$

et ainsi, en particulier, pour $a = 2$ et $a = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2.3}\cdot 2 + \frac{2}{3.4}\cdot 2^2 + \frac{3}{4.5}\cdot 2^3 + \cdot\;\cdot\;\cdot + \frac{p}{(p+1)(p+2)}\cdot 2^p = \frac{2^{p+1}}{p+2} - 1 \;,$$

$$\frac{3}{1.2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{2.3}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{5}{3.4}\cdot\frac{1}{2^3} + \cdot\;\cdot\;\cdot + \frac{p+2}{p(p+1)}\cdot\frac{1}{2^p} = 1 - \frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{2^p} \;.$$

§ 5.

Si, dans la formule (33), nous posons $u_p = p^m$ et $v_p = p^n$, nous obtenons la formule symbolique

$$\text{(35)} \qquad \mathrm{S}_m\mathrm{S}_n + \mathrm{S}_{m+n} = \mathrm{S}^m \frac{(\mathrm{S}+\mathrm{B})^{n+1} - \mathrm{B}^{n+1}}{n+1} + \mathrm{S}^n \frac{(\mathrm{S}+\mathrm{B})^{m+1} - \mathrm{B}^{m+1}}{m+1},$$

dans laquelle on prendra pour B_1 la valeur $+\frac{1}{2}$ ainsi que dans les formules suivantes ; on a encore, pour $m = n$

$$\text{(36)} \qquad \frac{m+1}{2}\left[\mathrm{S}_m^2 - \mathrm{S}_{2m}\right] = \mathrm{S}^m\left[\mathrm{S}+\mathrm{B}\right]^{m+1} - \mathrm{S}^m\mathrm{B}^{m+1}$$

On obtient ainsi, en particulier, les formules[1] :

$$\text{(37)} \qquad \begin{cases} \mathrm{S}_1^2 = \mathrm{S}_3, \\ \mathrm{S}_2^2 = \frac{2}{3}\mathrm{S}_5 + \frac{1}{3}\mathrm{S}_3, \\ \mathrm{S}_3^2 = \frac{1}{2}\mathrm{S}_7 + \frac{1}{2}\mathrm{S}_5, \\ \mathrm{S}_4^2 = \frac{2}{5}\mathrm{S}_9 + \frac{2}{3}\mathrm{S}_7 - \frac{1}{15}\mathrm{S}_5, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et, inversement

$$\text{(38)} \qquad \begin{cases} 2\mathrm{S}_3 = 2\mathrm{S}_1^2, \\ 2\mathrm{S}_5 = 3\mathrm{S}_2^2 - \mathrm{S}_1^2, \\ 2\mathrm{S}_7 = 4\mathrm{S}_3^2 - 3\mathrm{S}_2^2 + \mathrm{S}_1^2, \\ 2\mathrm{S}_9 = 5\mathrm{S}_4^2 - \frac{20}{3}\mathrm{S}_3^2 + \frac{11}{2}\mathrm{S}_2^2 - \frac{11}{6}S_1^2, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

---

[1] Dans une lettre de M. C. Schumacher à C. F. Gauss, publiée en 1863 (Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher. Herausgegeben von C. A. F. Peters. Fünfter Band. Altona. Druck von Gustav Esch. 1863, page 298, lig. 20-34, pages 299-300, page 201, lig. 1–6), et qui a la signature et date suivantes (Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, etc. Fünfter Band, etc., page 301, lig. 4-6) : « Ihr ewig dankbarer H. C. Schumacher » on lit (Briefwechsel zwischen C. F. Ganss und H. C. Schumacher, etc. Fünfter Band, Band, etc., page 299, lig. 10-24) :

« M. Jacobi bemerkt sonst in diesem Briefe in Bezug auf die Summe der Potenzen der nahnlichen Zahlen, dass freilich die Relation $(\Sigma x^1)^2 = \Sigma x^3$ isolirt stehe, dass aber die Summen von zwei und mehreren dieser Reihen mit bestimmten Coefficienten multiplicirt gleich einer Potenz einer einzelnen seyn können, z. B. $\frac{1}{2}\left(\sum x^7 + \sum x^5\right) = \left(\sum x^8\right)^2 = \left(\sum x^1\right)^4$

Dass $(\Sigma x^1)^2 = \Sigma x^3$, sagt Jacobi, stehe schon in Luca di Borgos Summa Arithmetica.

Aus einer Neuplatoniker theilt er mir noch einen eleganten Sats mit über die Erzeugung der Cuben (nicht allein der Quadrate) aus der Summation der ungeraden Zahlen, wenn man bei den Cuben immer die folgenden ungeraden Zahlen nimmt, statt, wie bei den Quadraten immer von vorue anzufangen, $1=1^2$, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$ etc.
$1=3^3$, $3+5=2^3$, $7+9+11=3^3$, $13+15+17+19=4^3$,etc. »

Si l'on divise tous les termes de la formule (35) par x, et si l'on fait ensuite $x = 0$, on obtient la formule

$$(39)\qquad B_{m+n} = \beta^m \frac{(\beta + B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} + \beta^n \frac{(\beta + B)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1},$$

dans laquelle on doit remplacer, après le développement, β_r par B_r (puisque $\frac{S_m(x)}{x}$ devient égal à B_m pour x égal à zéro), et B_1 par $+\frac{1}{2}$.

Si l'on fait $m = 1$ et $n = 2q - 1$, on obtient la formule

$$(B + \beta)^{2q} + (2q + 1)B^{2q} = 0,$$

donnée, sous une autre forme, par M. WORONTZOFF[1], et par M. LE PAIGE[2].

§ 6.

En désignant par T_m la somme des puissances $m^{ièmes}$ des $(x - 1)$ premiers nombres impairs, on déduit du développement de $(2x - 1)^m$, en y remplaçant successivement x par 1, 2, 3, ... , $(x - 1)$, et en faisant la somme des résultats

$$T_m = (2S - 1)^m.$$

Inversement, on déduit du développement de $(2x + 1)^m$, en y remplaçant successivement $2x$ par 1, 2, 3, . . .$(x - 1)$, et faisant la somme des résultats

$$(2S)^m = (T + 1)^m.$$

Les formules précédentes nous prouvent l'équivalence des symboles $2S$ et $T + 1$, dans les transformations des équations algébriques. On a ainsi, au moyen de l'équation (1), en changeant $f(x)$ en $\varphi(x - 1)$, et S en $\frac{T+1}{2}$, la relation

$$\varphi\left(\frac{T+1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{T-1}{2}\right) = \varphi(x-1) - \varphi(0)$$

On obtient la somme des puissances semblables des $(x - 1)$ premiers nombres impairs, par la remarque suivante[3]. La somme des $m^{iè-}$

---

[1] NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES. JOURNAL DES CANDIDATS AUX ECOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE. REDIGE PAR MM. GERONO, etc. ET CH. BRISSE, etc. DEUXIEME SERIE, *TOME QUINZIEME*. PUBLICATION FONDEE EN 1842, etc., PARIS, etc. 1876, page 16, lig. 9, JANVIER 1876.

[2] NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHEMATIQUE, REDIGEE PAR EUGENE CATALAN, ANCIEN ELEVE, etc. TOME DEUXIEME, 1876. BRUXELLES, etc. 1876, page 127, lig. 2-6, JANVIER 1876.

[3] LACROIX (TRAITE DE CALCUL DIFFERENTIEL, etc. SECONDE EDITION, etc. TOME TROISIEME, etc., page 445, lig. 5-26, page 446, lig. 1-11, page 759, col. 2^a, lig. 40-46) attribue cette remarque à LORGNA. D'autre part, en tête du volume III, liste des ouvrages étudiés (TRAITE DU CALCUL DIFFERENTIEL, etc. SECONDE EDITION, etc. TOME TROISIEME etc. , page IX, col. 2^a, lig. 5-6), LACROIX renvoie à un volume des années 1786-1787 des *Mémoires de Turin*. Cette remarque se trouve, pour la somme des cubes des nombres impairs, développée par Ibn Almadjdi, (ANNALI DI MATEMATICA PURA ED

^{mes} puissances des $(2x)$ premiers nombres entiers est égale à la somme des $m^{ièmes}$ puissances des x premiers nombres impairs, augmentée du produit par 2^m de la somme des mêmes puissances des x premiers nombres entiers. Donc, en désignant maintenant par T_m la somme des $m^{ième}$ puissances des x premiers nombres impairs, on a

$$nT_{n-1} = (2\,x + B)^n - B^n - 2^{n-1}[(x + B)^n - B^n]\ ,$$

ou, bien

$$nT_{n-1} = (2x + R)^n - R^n\ ;$$

les coefficients R_n sont donnés par la formule

$$R_n = B_n(1 - 2^{n-1})\ ,$$

et, en général, par la formule

$$f(z + R) = f(z + B) - \frac{1}{2}f(z + 2B).$$

On a ainsi pour les nombres R , les valeurs suivantes

$$R_0 = +\ \frac{1}{2},\quad R_2 = +\ \frac{1}{6},\quad R_4 = +\ \frac{7}{30},\quad R_6 = -\ \frac{31}{42}\ .\ .\ .\ .$$

et R_{2n+1} est égal à zéro.

Si nous posons dans l'expression de T_{n-1} , l'égalité $y{=}2x{+}1$, et si nous remplaçons ensuite y *par* $y + 1$ nous obtenons, par différence

$$ny^{n-1} = (y + R + 1)^n - (y + R - 1)^n\ ;$$

plus généralement ,

$$f'(y) = f(y + R + 1) - f(y + R - 1)\ ,$$

et, pour $y = 0$,

$$f'(0) = f(R + 1) - f(R - 1)\ ,$$

Cette dernière égalité donne, dans l'hypothèse $f(y) = e^{yz}$,

$$e^{Rz} = \frac{z}{e^z - e^{-z}}\,,$$

et, pour $f(x) = sin\ yz$,

$$\cos Rz = \frac{z}{2}\operatorname{coséc} z\,.$$

La convergence de ces deux séries a lieu pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est inférieur à π.

On peut trouver pour les nombres R un grand nombre de formu-

APPLICATA. PUBBLICATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. TOMO VI, etc., page 239, lig. 1-13. — PASSAGES RELATIFS A DES SOMMATIONS DE SERIES DE CUBES. EXTRAITS DE DSEX MANUSCRITS ARABES INEDITS DU *BRITISH MUSEUM DE LONDRES*, COTES N.^{os} CCCCXVII ET CCCCXIX DES MANUSCRITS ORIENTAUX (N.^{os} 7469 ET 7470 DES MANUSCRITS ADDITIONNELS) PAR M. F. WOEPCKE, etc., page 16, lig. 9-15).

les semblables à celles qui ont été données pour les nombres de Bernoulli. Nous indiquerons plus particulièrement les suivantes :

$$\frac{R+z+2}{z+1}\cdot\frac{R+z+4}{z+3}\cdots\frac{R+z+2n}{z+2n}=\frac{z+2n+1}{2n+2}\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+3}+\cdots+\frac{1}{z+2n+1}\right].$$

Si l'on ègale successivement z à 0, $+1$, -1, on a

$$\frac{R+2}{1}\cdot\frac{R+4}{3}\cdot\frac{R+6}{5}\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\frac{R+2n}{2n-1}=\frac{2n+1}{2n+2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\;\cdot\;\cdot\;\cdot+\frac{1}{2n+1}\right],$$

$$\frac{R+3}{2}\cdot\frac{R+5}{4}\cdot\frac{R+7}{6}\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\frac{R+2n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot+\frac{1}{2n+2}$$

$$(R+1)(R+3)(R+5)\;\ldots\;(R+2n-1)=\frac{n}{n+1}\,.\,2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2n).$$

On peut encore exprimer T_n en fonction du dernier terme $z=2x-1$; on trouvera ainsi la formule suivante, dans laquelle $B=+\frac{1}{2}$,

$$2nT_{n-1} = (z + 2B)^n - 2\,R_n,$$

et l'on voit que, pour $z = 0$, T_{n-1} devient égal à $\frac{P_n}{2n}$. Si donc on fait dans la formule (33), les hypothèses

$$u_p = (2p - 1)^m, \qquad v_p = (2p - 1)^n,$$

on obtient

$$T_mT_n+T_{m+n}=T^m\,\frac{(T+2B)^{n+1}-2R^{n+1}}{2(n+1)}+T^n\,\frac{(T+2B)^{m+1}-2R^{m+1}}{2(m+1)},$$

et, pour $m = n$, en supposant B_1, nul,

$$(n+1)T_n^2=T^n[(T+2\,B)^{n+1}-2R^{n+1}],$$

En faisant $z = 0$, on obtient de nouvelles relations entre les nombres B et P, car les R disparaissent de l'équation précédente.

§ 8.

Ou peut obtenir, plus généralement, la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique

$$a,\; a + r,\; a + 2r,\; \ldots,\; a + (x - 1)r.$$

Soit, en effet, la fonction

$$\Delta f(z) = f(z + r) - f(z),$$

ordonnée suivant les puissances de z, et égale à la différence première d'une fonction $f(z)$ pour une différence de l'argument égale à la raison r de la progression arithmétique. Si, dans cette égalité, nous remplaçons successivement z par a, $a+r$, $a+2r$, ... , $a + (x-1)r$, et si nous faisons la somme des identités obtenues, nous trouvons, en désignant encore par Z_m la somme des $m^{ième}$ puissances des termes de la progression, la formule symbolique

$$f(Z + r) - f(Z) = f(a + xr) - f(a),$$

dans laquelle nous devons remplacer les exposants de Z par des indices, et Z_0 par x.

En supposant, par exemple, $f(z) = z^m$, nous obtenons

$$(Z + r)^m - Z^m = (a + xr)^m - a^m ;$$

en supposant $f(z) = (z - r)^m$, nous obtenons

$$Z^m - (Z - r)^m = [a + (x - 1)r]^m - (a - r)^m.$$

Par suite, en ajoutant membre à membre les deux relations précédentes,

$$(Z + r)^m - (Z - r)^m = (a + xr)^m - a^m + (a + (x - 1)\, r)^m - (a - r)^m.$$

Si donc nous supposons que m désigne un nombre pair, le premier membre ne contient après le développement, que les sommes Z d'indice impair ; mais le second membre devient identiquement nul par les deux hypothèses successives $x = 0$, et $2a + (x - 1)r = 0$; par conséquent, le premier membre est toujours divisible par le produit de x par $2a + (x - 1)r$ qui représente le double de la somme Z_1 des termes de la progression. On a donc le théorème suivant que nous avons énoncé autrefois sans démonstration[1].

THEOREME. — *La somme des puissances semblables impaires des x premiers termes d'une progression arithmétique est divisible algébriquement par la somme des x premiers termes, quel que soit x.*

Dans le cas particulier de $m = 3$, on obtient la formule suivante, donnée par LEBESGUE, à l'occasion d'un problème posé par M. le Prince B. BONCOMPAGNI, et dont il sera parlé ultérieurement[2]

$$4\, Z_3 = Z_1[(2a + \overline{x-1}r)^2 + (x^2 - 1)r^2] .$$

On peut, comme pour la progression des nombres naturels, obtenir au moyen du calcul symbolique un grand nombre de formules nouvelles,

---

[1] BULLETIN DE LA SOCIETE D'EMULATION DU DEPARTEMENT DE L'ALLIER (SCIENCES, ARTS ET BELLES-LETTRES.) TOME XII, MOULINS, IMPRIMERIE DE C. DESROSIERS, MDCCCLXXIII, page 258, lig. 15-20. — RECHERCHES SUR L'ANALYSE INDETERMINEE ET L'ARITHMETIQUE DE DIOPHANTE. PARIS. Edouard LUCAS, etc. (EXTRAIT DU BULLETTIN DE LA SOCIETE D'EMULATION DE L'ALLIER,) MOULINS IMPRIMERIE DE C. DESROSIERS 1873, page 88, lig. 15-20.

[2] ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA COMPILATI DA BARNABA TORTOLINI. etc. TOMO V, etc. ROMA, etc. 1864. — INTORNO AD UN PROBLEMA INDETERMINATO. *LETTERE INDIRIZZATE* DAL SIG. V. A. LE BESGUE. Professore onorario della Facoltà delle Scienze di Bordeaux. E DAL SIG. ANGELO GENOCCHI Professore di Matematica nella Regia Università di Torino. A D. B. BONCOMPAGNI. Estratte dagli *Annali di Matematica pura ed applicata* compilati da BARNABA TORTOLINI. Tomo V, n° 6. ROMA. TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE. Via Lata N° 211 A. 1864, page 3, lig. 12.

propres à fatiliter le calcul des sommes Z. Ainsi, on a

$$(Z+r)^m + (Z-r)^m - 2Z^m = (a+xr)^m - (a+\overline{x-1}r)^m - a^m + (a-r)^m .$$

On a encore, en faisant $f(z) = \left(z - \frac{r}{2}\right)^m$, la formule

$$(2Z + r)^m - (2Z - r)^m = [2a + (2x - 1)r]^m - [2a - r]^m.$$

On peut aussi exprimer les sommes Z en fonction des sommes S ; mais, dans ce qui va suivre, nous ne ferons commencer la progression arithmétique qu'au second terme $a + r$; on a ainsi, en faisant le développement de $(a + zr)^m$, et additionnant les résultats obtenus successivement par les hypothèses z = 1, 2, 3, . . . , $x - 1$, la formule symbolique

$$Z^m = (a + rS) ;$$

on a inversement

$$S^m = \left(\frac{Z-a}{r}\right)^m ,$$

ainsi qu'on peut le démontrer comme pour les nombres impairs ; de telle sorte que les symboles Z et $a + r$S sont équivalents dans les transformations des formules algébriques. Par suite, la formule (1) nous donne[1]

$$f\left(\frac{Z+r-a}{r}\right) - f\left(\frac{Z-a}{r}\right) = f(x) - f(1) .$$

---

[1] On trouve d'autres développements sur cette question dans un travail présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 4 septembre 1876 (COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, ETC. TOME QUATRE-VINGT-TROISIEME. JUILLET-DECEMBRE 1876. PARIS, etc. 1876, etc., page 539, lig. 12-29, pag. 540, page 541, lig. 1-22, N° 10, SEANCE DU LUNDI 4 SEPTEMBRE 1876. — *Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler* ; PAR M. E. LUCAS (In 4.°, de 3 pages, dans la troisième desquelles, numérotée 3 (lig. 16-18) on lit: « (4 septembre 1876) GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES. Paris. – Quai des Augustins, 55 » , et dans d'autres écrits publiés en Novembre l876 (NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHEMATIQUE REDIGEE PAR EUGENE CATALAN, etc. TOME DEUXIEME. 1876. BRUXELLES, etc. 1876, page 328, lig. 12-i9, pages 329-337, page 338, lig. 1-8 , NOVEMBRE 1876. — SUR LE CALCUL SYMBOLIQUE DES NOMBRES DE BERNOULLI ; PAR M. EDOUARD LUCAS, PROFESSEUR AU LYCEE CHARLEMAGNE (Extrait de la *Nouvelle Correspondance Mathématique*, tome II. livraison de novembre 1876.) BRUXELLES, F. RAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADEMIE ROYALE. 1874 (In 8°, de 12 pages), janvier 1877 — ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA. DIRETTI DAL. prof. Francesco Brioschi IN MILANO, etc. SERIE II.[a] TOMO VIII. FASCICOLO I° (Gennajo 1877.) MILANO G. BERNARDONI EDITORE TIPOGRAFO 1877. — THEORIE NOUVELLE DES NOMBRES DE BERNOULLI ET D'EULER PAR M. EDOUARD LUCAS professeur au lycée Charlemagne à Paris. Estratta dagli *Annali di Matematica pura ed applicata* Serie II.[a] - TOMO VIII. (da pagina 56 a pagina 79) (In 4°, de 24 pages), et en mars 1877 (NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHEMATIQUE. etc, TOME TROISIEME ; MARS 1877, etc., page 69, lig. 17-21, pages 69-72, page 73, lig. 1-12).

CHAPITRE V.

SUR DIVERS PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

§ 1.

SUR L'INVENTION DES NOMBRES PARFAITS

En désignant par $a, b, c, \ldots$, les facteurs premiers différents d'un nombre N donné par l'expression

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots ,$$

on sait que la somme S des diviseurs de N en y comprenant l'unité et le nombre N lui-même, est fournie par la formule

$$S = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \cdots$$

D'ailleurs il est facile de voir que S est toujours plus grand que N ; mais, si l'on ne tient pas compte dans cette somme du nombre N, et si l'on se borne, comme on disait autrefois, à ses *parties aliquotes,* il peut se présenter trois cas distincts :

1.° Le nombre N est égal à la somme de ses parties aliquotes ; on l'appelait autrefois un *nombre parfait.*

2.° Le nombre N est supérieur à la somme de ses parties aliquotes ; on l'appelait *nombre déficient.*

3.° Le nombre N est inférieur à la somme de ses parties aliquotes ; on l'appelait autrefois nombre *abondant.*

Les mathématiciens des siècles passés se sont passionnés pour le calcul de ces nombres, auxquels ils accordaient des vertus singulières ; mais leur étude a été délaissée de nos jours, à cause de son manque de portée pratique. Il n'en est pas moins intéressant de rechercher les méthodes qui servaient à leur invention.

La discussion approfondie des exemples donnés par FERMAT et ses contemporains, m'autorise à penser que cet illustre savant, regardé par LAGRANGE « comme le premier inventeur des nouveaux calculs »[1], employait dans cette théorie, comme dans toutes celles qu'il a créées, mais laissées inachevées, sur l'arithmétique supérieure, la *considération des séries récurrentes, de première espèce,* c'est-à-dire celles dans lesquelles la différence des racines de l'équation du second degré correspondante, est réelle et rationnelle.

Nous avons fait remarquer dans le chapitre I, en prenant comme exemple la *série récurrente de seconde espèce,* de FIBONACCI, l'importance des propriétés de ces séries dans la théorie des nombres premiers ; nous allons faire voir que leur importance n'est pas moin-

---

[1] « On peut regarder *Fermat* comme le premier inventeur des nouveaux calculs » (LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS. NOUVELLE EDITION, etc., page 321, lig. 28-29).

dre pour arriver à la connaissance des nombres parfaits, et plus généralement des nombres ayant, avec la somme de leurs parties aliquotes, un rapport simple.

Mais il est d'abord indispensable de donner le tableau des facteurs premiers de la série récurrente analogue à celle de FIBONACCI, et déterminée par la formule

$$u_n = 2^n - 1.$$

On trouve, dans la correspondance de FERMAT, les énoncés d'un certain nombre de propriétés remarquables de cette série, que l'on déduit de la *progression double*. Dans une lettre de FERMAT au Père MERSENNE[1] on lit en effet[2] :

« Ce que j'estime le plus est cet abbregé pour l'invention des nombres parfaits, à quoy je suis résolu de m'attacher, si Monsieur Frénicle ne me fait part de sa méthode. Voicy trois propositions que j'ay trouvées, sur lesquelles j'espère de faire un grand bastiment.

Les nombres moindres de l'unité que ceux qui précédent de la progression double, comme

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
	11	12	13	2047	4095	8191				

Soient appellez les nombres parfaits, parceque toutes les fois qu'ils sont premiers ils les produisent. Mettez au dessus de ces nombres, autant en progression naturelle 1. 2. 3. &c. qui soient appellez leurs exposans.

Cela supposé, je dis,

1. Que lors que l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé, comme parceque 6. exposant de 63. est composé, je dis que 63. est aussi composé.

2. Lors que l'exposant est nombre premier, je dis que son radical moins l'unité est mesuré par le double de l'exposant, comme parceque 7. exposant de 127. est nombre premier, je dis que 126. est multiple de 14.

3. Lors que l'exposant est nombre premier, je dis que son radical ne peut être mesuré par aucun nombre premier que par ceux qui sont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'exposant, ou que le double de l'exposant. Comme parce que 11. exposant de 2047. est nombre premier, je dis qu'il ne peut être mesuré que par un nombre plus grand de l'unité que 22. comme 23. ou bien par un nombre plus grand de l'unité d'un multiple de 22. en effet 2047. n'est mesuré que par 23. & 89. duquel si vous ôtez l'unité, reste 88. multiple de 22.

Voilà trois fort belles propositions que j'ai trouvées & prouvées non sans peine. Je les puis appeler les fondements de l'invention des nombres parfaits. Je ne doute pas que Monsieur Frénicle ne soit allé plus avant ; mais je ne fais que commencer, & sans doute

---

[1] VARIA OPERA MATHEMATICA. D. PETRI DE FERMAT, ecc., page 176, lig. 9-44, page 177, page 178, lig. 1-2. — MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES, etc. DE TOULOUSE. Quatrième Série. TOME III, etc., page 147, lig. 26-33, pages 148-149, page 150 , lig. 1-6. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT ET DE L'ARITHMETIQUE DE DIOPHANTE ; PAR E. BRASSINNE, etc., page 147, lig. 26-33, pages 148-149, page 150, lig. 1-6. — Cette lettre est intitulée (VARIA OPERA MATERIATICA D. PETRI DE FERMAT, etc., page 176, lig. 9-10) : « *Lettre de Monsieur de Fermat au Reuerend Pere Mersenne de l'Ordre des Minimes. A Paris* ».

[2] VARIA OPERA MATHEMATICA. D. PETRI DE FERMAT, etc., page 177, lig. 9-39. — MEMOIRES DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES, etc. DE TOULOUSE, Quatrième Série TOME III, etc., page 44, lig. 9-36, page 150,, lig. 1-6. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT ET DE L'ARITHMETIQUE DE DIOPHANTE, PARIS. BRASSINNE, etc., page 149, lig. 9-36, page 150, lig. 1-6.

ces propositions passeront pour très-belles dans l'esprit de ceux qui n'ont pas beaucoup épluché ces matières, & je seray bien aise d'apprendre le sentiment de Monsieur de Roberval. »

On obtient les facteurs premiers de cette série récurrente par des considérations entièrement analogues à celles que nous avons exposées pour la série de LEONARD DE PISE. Cette décomposition a dû être effectuée par FERMAT lui même, jusqu'à une certaine limite, puisqu'il indique la manière d'arriver à ce résultat, et notamment, pour le nombre u_{37}, qu'il a trouvé divisible par 223, dans une lettre du 12 octobre 1640[1].

---

[1] Dans cette lettre adressée et datée dans l'édition de 1679 : « A Monsieur de *** Du 18 Octobre 1640 » (VARIA OPERA MATHEMATICA D. PETRI DE FERMAT, etc., page 162, lig. 9), et dans une de M. Brassinne (MEMOIRES DE L'ACADEMIE, etc. DE TOULOUSE, etc. Quatrième Série TOME III, etc., page 142, lig. 27. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT, etc. PAR E. BRASSINNE, etc., page 142, lin. 27) : « 18 Octobre 1640 *A M.X.X* » on lit (VARIA OPERA MATHEMATICA. D. PETRI DE FERMAT, ecc. , page 163, lig. 13-51. — MEMOIRES DE L'ACADEMIE, etc. DE TOULOUSE, etc. Quatrième Série. TOME III, etc. , page 143, lig. 5-36, page 144, lig. 1-15. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT, etc. PAR E. BRASSINNE, etc., page 143, lig. 5-36, page 144, lig. 1-15)

« Il me semble après cela qu'il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuye les démonstrations de tout ce qui concerne les progressions Géométriques, qui est tel : Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances – 1. de quelque progression que ce soit, & l'exposant de ladite puissance est sous-multiple du nombre premier donné –1. Et après qu'on a trouvé la première puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposans sont multiples de l'exposant de la première satisfont de même à la question.

Exemple, soit la progression donnée,

1	2	3	4	5	6	
3	9	27	81	243	729,	&c.

Avec ses exposans au dessus.

Prenez, par exemple, le nombre premier 13. il mesure la troisième puissance –1, de laquelle 3. exposant est soùs multiple de 12. qui est moindre de 1'unité que le nombre de l3. Et parce que l'exposant de 729. qui est 6. est multiple du premier exposant 3. il s'ensuit que 13. mesure aussi ladite puissance de 729. –1. Et cette proposition est généralement vraye en toutes progressions & en tous nombres premiers. Dequoy je vous envoyerois la démonstration, si je n'apprehendois d'être trop long. Mais il n'est pas vray que tout nombre premier mesure une puissance +1 en toute sorte de progressions. Car si la première puissance –1 qui est mesurée par ledit nombre premier a pour exposant un nombre impair, en ce cas il n'y a aucune puissance +1 dans toute la progression qui soit mesurée par ledit nombre premier.

Exemple, parce qu'en la progression double 23. mesure la puissance –1 qui a pour exposant 11, ledit nombre 23. ne mesurera aucune puissance +1 de ladite progression à l'infini.

Que si la première puissance –1 qui est mesurée par le nombre premier donné a pour exposant un nombre pair : en ce cas la puissance +1 qui a pour exposant la moitié dudit premier exposant sera mesurée par le nombre premier donné.

Toute la difficulté consiste à trouver les nombres premiers, qui ne mesurent aucune puissance +1 en une progression donnée. Car cela sert, par exemple, à trouver que les deux nombres premiers mesurent les radicaux des nombres parfaits, & a mille autres choses ; comme, par exemple, d'où vient que la 37. puissance –1 en la progression double est mesurée par 223. En un mot, il faut déterminer quels nombres premiers sont ceux qui mesurent leur première puissance –1 & en telle sorte que l'exposant de ladite puissance soit un nombre impair, ce que j'estime fort mal-aisé, en attendant un plus grand éclaircissement de votre part, & qu'il vous plaise deffendre cet endroit de votre Lettre, où vous dites qu'après avoir trouvé que le diviseur doit être multiple +1 de l'exposant, il y a aussi des règles pour trouver le quantième desdits multiples +1 de l'exposant doit etre le diviseur ».

TABLEAU DES FACTEURS PREMIERS DE LA SERIE RECURRENTE DE FERMAT

N.	$u_n=2^n-1$	Divis. impropres	Diviseurs propres
1	1	——	——
2	3	——	3
3	7	——	7
4	15	3	5
5	31	——	31
6	63	$3^2\times7$	——
7	127	——	127
8	255	3×5	17
9	511	7	73
10	1023	3×31	11
11	2047	——	23×89
12	4095	$3^2\times5\times7$	13
13	8191	——	8191
14	16383	3×127	43
15	32767	7×31	151
16	65535	$3\times5\times17$	257
17	1 31071	——	1 31071
18	2 62143	$3^3\times7\times73$	19
19	5 24287	——	5 24287
20	10 48575	$3\times5^2\times11\times31$	41
21	20 97151	$7^2\times127$	337
22	41 94303	$3\times23\times89$	683
23	83 88607	——	$47\times1\,78481$
24	167 77215	$3^2\times5\times7\times13\times17$	241
25	335 54431	31	601×1801
26	671 08863	3×8191	2731
27	1342 17727	7×73	2 62657
28	2684 35455	$3\times5\times43\times127$	29×113
29	5368 70911	——	$233\times1103\times2089$
30	10737 41823	$3^2\times7\times11\times31\times151$	331
31	21474 83647	——	21474 83647
32	42949 67295	$3\times5\times17\times257$	65537
33	85899 34591	$7\times23\times89$	5 99479
34	1 71798 69183	$3\times1\,31071$	43691
35	3 43597 38367	31×127	$71\times1\,22921$
36	6 87194 76735	$3^2\times5\times7\times13\times19\times73$	37×109
37	13 74389 53471	——	$223\times6163\,18177$
38	27 48779 06943	$3\times5\,24287$	1 74763
39	54 97558 13887	7×8191	$79\times1\,21369$
40	109 95116 27775	$3\times5^2\times11\times17\times31\times44$	61681

Il serait d'ailleurs assez long et pénible de donner une certaine extension à ce tableau. Ainsi la décomposition en facteurs du terme $u_{41}=2^{41}-1$, n'a été obtenue qu'en 1859, par PLANA. Il a trouvé[1]

[1] MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO SERIE SECONDA, TOMO XX, etc., page 129, lig. 27-28, page 130, lig. 1-5. — MEMOIRE SUR LA THEORIE DES NOMBRES, PAR JEAN PLANA, etc., page 17, lig. 27-28, page 18, lig. 1-5.

$$u_{41}=21990 \;.\; 23255 \;.\; 551=13367\times 16451135.$$

PLANA dit avoir reconnu que le nombre

$$2^{53}-1 = 9007199254740991$$

n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à 50033[1]. Cependant M. Landry a trouvé[2] :

$$2^{53}-1 = 6361 \;.\; 69431 \;.\; 20394401.$$

On voit donc que $2^{53}-1$ a trois diviseurs, et que l'un d'eux, c'est-à-dire 6361, est inférieur à la limite 50033 assignée par PLANA.

M. GENOCCHI a fait remarquer[3] que le Père MERSENNE considérait comme premiers les nombres[4]

---

[1] MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, SERIE SECONDA TOMO XX, etc., page 141, lig. 29-30, page 142, lig. 1-5. — MEMOIRE SUR LA THEORIE DES NOMBRES PAR JEAN PLANA, etc., page 29, lig. 29-30, page 30, lig. 1-5.

[2] DECOMPOSITION DES NOMBRES $2^n\pm1$ EN LEURS FACTEURS PREMIERS DE n=1 A n=64, MOINS QUATRE, PAR M. F. LANDRY, Licencié ès sciences mathématiques, AUTEUR DE PLUSIEURS MEMOIRES SUR LA THEORIE DES NOMBRES. Prix: 1 franc (AVEC L'OPUSCULE DE 1867(*). PARIS. LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET CIE. BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 77, 1869 (Opuscule de 8 pages. in 4°) page 7, col. 1, lig. 14, col. 2, lig. 13, col. 3, lig. 23.

[3] ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, etc. VOLUME UNDECIMO, etc., page 827, lig. 22-26. INTORMO A TRE PROBLEMI ARITHMETICI DI PIETRO FERMAT NOTA DI A. GENOCCHI, etc., page 19, lig. 15-19. — Voyez ci-dessus, page 36, lig. 47-51, note [(*)].

[(*)] Cet opuscule intitulé : « AUX MATHEMATICIENS DE TOUTES LES PARTIES DU MONDE, COMMUNICATION SUR LA DECOMPOSITION DES NOMBRES EN LEURS FACTEURS SIMPLES, PAR M. F. LANDRY, Licencié ès mathématiques, AUTEUR DE PLUSIEURS MEMOIRES SUR LA THEORIE DES NOMBRES. PARIS, LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET C[ie], BOULEVARD SAINT GERMAIN, 77. 1867 », et composé de 12 pages in 4°, et dans la douzième desquelles, numérotée 12 (lig. 28-29) on lit : « 27 mars 1867, Paris. — Typographie de Ad. Lainé et J. Havard, rue des Saint-Pères, 19. »

[4] Dans la « PRÆFATIO GENERALIS » de ses « COGITATA PHYSICO MATHEMATICA », etc. le Père Mersenne dit (F. MARINI MERSENNI MINIMI COGITATA PHYSICO MATHEMATICA. In quibus tam naturæ quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur. PARISIIS, Sumptibus ANTONII BERTIER, via Iacobæa, M.DC.XLIV. CVM PRIVILEGIO REGIS, feuillet 11[ème], *recto,* lig. 36-40, *verso,* lig. 1-37) :

> « XIX. Ad ea quæ de Numeris ad calcem prop. 20. de Ballist. & puncto 14 Præfationis ad Hydraul. dicta sunt, adde inuentam artem quâ numeri, quotquot volueris, reperiantur qui cum suis partibus aliquotis in vnicam summam redactis, non solum duplam rationem habeant, (quales sunt 120, minimus omnium, 672, 523776, 1476304896, & 459818240, qui ductus in 3, numerum efficit 1379454720, cuius partes aliquotæ triplæ sunt, quales etiam sequentes 30240, 32760, 23569920, & alij infiniti, de quibus videatur Harmonia nostra, in qua 14182439040, & alij suarum partium aliqnotarum subquadrupli) sed etiam sint in ratione data cum suis partibus aliquotis.
>
> Sunt etiam alij numeri, quos vocant amicabiles, quod habeant partes aliquotas à quibus mutuò reficiantur, quales sunt omnium minimi 220, & 284 ; huius enim aliquotæ partes illum efficiunt, vicéque versa partes illius aliquotæ hunc perfectè restituunt. Quales & 18416 & 17296 ; nec non 9437036, & 4363584 reperies, aliosque innumeros.
>
> Vbi fuerit operæ pretium aduertere XXVIII numeros à Petro Bungo pro perfectis exhibitos, capite XXVIII. libri de Numeris , non esse omnes Perfectos, quippe 20 sunt imperfecti, adeovt solos octo perfectos habeat videlicet 6. 28. 496. 8128. 23550336. [(**)] 8589869056. 137438691328, & 2305843008139952128 ; qui sunt è regione tabulæ Bungi, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 12, & 29 : quique soli perfecti sunt, vt qui Bungum habuerint, errori medicinam faciant.
>
> Porrò numeri perfecti adeo rari sunt, vt vndecim dumtaxat potuerint hactenus inueniri : hoc est, alii tres à Bougianis differentes : neque enim vllus est alius perfectus ab illis octo, ni-

$$2^{67}-1, \quad 2^{127}-1, \quad 2^{257}-1.$$

En continuant cette décomposition, j'ai encore trouvé que, si l'on désigne par v_n le quotient de u_{2n} par u_n, ou l'expression 2^n+1, les nombres

$$\frac{v_{40}}{v_8} = 42782\,55361, \quad \text{et} \quad \frac{v_{41}}{3\times 83} = 88314\,186697,$$

sont premiers[1].

Considérons un nombre N de la forme

$$N = 2^n \times A,$$

A étant un nombre premier, nous avons pour la somme S de ses diviseurs, 1 et N compris,

$$S=(2^{n+1}-1)(A+1);$$

nous en déduisons que le rapport R de la somme S des diviseurs de N, à N est égal à

$$R = \frac{S}{N} = \frac{(2^{n+1}-1)(A+1)}{2^n A}.$$

On obtiendra donc pour N un nombre parfait, en posant R =2, et par suite

$$A = 2^{n+1}-1, \quad N = 2^n \times A,$$

en supposant expressément que A on u_{n+1}, désigne un nombre premier. On trouve ainsi, au moyen du tableau qui précède, les nombres parfaits

---

si superes exponentem numerum 62, progressionis duplæ ab 1 incipientis. Nonus enim perfectus est potestas exponentis 68 minus 1. Decimus, potestas exponentis 128, minus 1. Vndecimus denique, potestas 258, minus 1, hoc est potestas 257, vnitate decurtata, multiplicata per potestatem 256.

Qui vndecim alios repererit, nouerit se analysim omnem, quæ fuerit hactenus, superasse : memineritque interea nullum esse perfectum à 17000 potestate ad 32000 ; & nullum potestatum interuallum tantum assignari posse, quin detur illud absque perfectis. Verbi gratia, si fuerit exponens 1050000, nullus erit numerus progressionis duplæ vsque ad 2090000, qui perfectis numeris serviat, hoc est qui minor vnitate, primus existat.

Vnde clarum est quàm rari sint perfecti numeri, & quàm meritò viris perfectis comparentur ; esseque vnam ex maximis totius Matheseos difficuItatibus, præscriptam numerorurn perfectorum multitudinam exhibere ; quemadmodum & agnoscere num dati numeri 15, aut 20 caracteribus constantes, sint primi necne, cùm nequidem sæculum integrum huic examini, quocumque modo hactenus cognito, sufficiat ».

(**) c'est par erreur que l'on trouve ici « 23550336 » au lieu de « 33550336 ».

Ce passage de la même PRÆFATIO est rapporté par C. N. de Winsheim dans un mémoire publié en 1751 (NOVI COMMENTARII ACA.DEMIÆ SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANÆ. TOM. II. AD Annum MDCCXLIX. *PEVROPOLI* TYPIS ACADEMIÆ SCIENTIARVM. M D CCLI, page 78, lig. 4-33, *DE NVMERIS PERFECTIS*. AVCTORE *C. N. de Winsheim)*, et dans lequel le même passage est immédiatement précédé par les mots suivants (NOVI COMMENTARII ACADEMIÆ SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANÆ. TOM. II ad Annum M D CCLI, etc., page 77, lig. 24-27, page 78, lig. 2-3) :

« Suspicio enim adesse videtur, vtrum numerus nonus, perfecti locum tueri possit, quoniam ab acutissimo Mersenno exclusus reperitur, qui eius in locum potestatem binarii $(2^{67}-1)2^{66}$ siue numerum decimum nonum perfectum Hanschii 147573952589676412927, substituit : digna certe mihi visa sunt verba vini perspicacissimi, vt hic integra exhibeantur ».

[1] NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES, ETC. DEUXIEME SERIE, *TOME QUINZIEME*, page 525, lig. 23-26, NOVEMBRE 1875. — COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES, etc. TOME QUATRE-VINGT-DEUXIEME, 11 JANVIER-JUIN 1876. PARIS etc. 1876, page 167, N° 2, SEANCE DU LUNDI 10 JANVIER 1876.

$$2^1 u_2,\ 2^2 u_3,\ 2^4 u_5,\ 2^6 u_7,\ 2^{12} u_{13},\ 2^{16} u_{17},\ 2^{18} u_{19},\ 2^{30} u_{31},\ \ldots$$

dont le chiffre des unités est toujours égal à 6 ou à 8. Cette méthode d'invention était connue des Grecs[1] ; mais il est assez curieux de constater que cette question précède *immédiatement*, dans le *Liber Abbaci* , celle dans laquelle nous avons trouvé la série récurrente de FIBONACCI, sans qu'on puisse apercevoir, néanmoins, le lien qui a pu réunir ces deux questions importantes[2] dont les développements semblent appartenir aujourd'hui à la même théorie.

On peut obtenir au moyen de la série, d'autres nombres tels que le rapport que nous désignerons par R, de la somme S de *tous* les diviseurs de N *à* N soit un nombre simple. On a

$$u_{15} = 7 \,.\, 31 \,.\, 151.$$

Posons, par exemple,

$$N = 2^{14} \times u^{15} \times A \times B \times C \ldots .$$

A, B, C, . . . désignant des nombres premiers différents, nous obtenons

$$R = \frac{S}{N} = \frac{8 \times 32 \times 152 \times (A+1)(B+1)(C+1)\ldots}{2^{14}.A.B.C}$$

Puisque $152 = 2^3 \times 19$, on posera A = 19, et puisque $A+1 = 2^4 \times 5$, on posera B = 5, et en ne tenant pas compte de C, on aura, pour

$$N = 2^{14} \times 5 \times 7 \times 19 \times 31 \times 151,$$

le rapport simple

$$R = \frac{S}{N} = 3,$$

Le nombre indiqué est ainsi *sous-double* de ses parties aliquotes ;

---

[1] EUCLIDIS QUÆ SUPERSUNT OMNIA. Ex recensione DAVIDIS GREGORII M. D. Astronomiæ, Professoris Saviliani, & R. S. S. OXONIE, E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCIII, page 207, col. l[a]. lin. 29-54 , col. 2[a], lig. 31-50, page 208, EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER NONUS, PROP. XXXVI.

[2] On lit en effet dans la huitième partie du deuxième chapitre de cet ouvrage (SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. VOLUME I., etc., page 283, lig. 16-31) :

« *De inuentione perfectorum numerorum.*

Perfectus numerus est, ex quo, acceptis suis partibus, quas ipse in integrum habet, facit eumdem numerum, ut 6, cuius partes sunt $\frac{1}{6}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$; et alias partes preter has non habet in integrum. Et accepto $\frac{1}{2}$ de 6, scilicet 3, et $\frac{1}{3}$, scilicet 2, et 1 scilicet 1, nimirum eadem faciunt 6 ; que 6 inueniuntur sic : duplica 1, erunt 2; que duplica 2, erunt 4 : de quibus tolle 1, remanent 3 ; qui numerus, cum sit primus, hoc est, quod non habeat regulam, multiplica ipsum per dimidium de suprasciptis 4 ; et sic habebis 6. Vnde si aliquem alium perfectum numerum inuenire uolueris, duplicabis iterum 4, erunt 8 ; de quibus tolles 1, remanebunt 7 ; qui numerus, cum non habeat regulam, multiplicabis eum per dimidium de 8, uidelicet per 4, erunt 28 ; qui iterum, perfectus est ; quia suis collectis partibus equiparatur. Partes enim ipsius sunt $\frac{1}{28}\,\frac{1}{14}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$. Rursum duplicatis 8, faciunt 16 ; de quibus, cum extrahitur 1, remanent 15 ; qui cum habeat regulam, duplicabis iterum 16, erunt 32 ; de quibus tolles 1, remanebunt 31 ; qui numerus, cum sit sine regula, multiplicabis eum per 16, et habebis alium perfectum numerum, scilicet 496 ; et sic semper faciendo, poteris in infinitum perfectos numeros reperire. »

en le multipliant par 3, on obtient R=4, et il devient un *sous-triple*. Par cette méthode, on forme ainsi un tableau des nombres parfaits dans lequel l'exposant *n* de 2 correspond au terme u_{n+1}, de la série récurrente étudiée par FERMAT.

Les nombres qui correspondent aux valeurs de *n*=4 et de *n*=6 ont été donnés par DESCARTES dans une de ses lettres publiées en 1667[1]. On lit en effet dans le texte français de cette lettre[2] :

« Et pour faire preuue des diuers vsages de l'Algebre on pourroit proposer touchant les nombres. *Inuenire numerum cuius partes aliquotœ faciant triplum*, en voicy deux 32760, dont les parties aliquotes, font 98280. Et 30240, dont les parties font 90720. On en demande vn troisième, auec la façon de les trouuer par regle ; ou bien, si on ne veut pas donner la regle, ie demande sept & huit tels nombres, pour ce que i'en ai autrefois enuoyé six ou sept à Paris, qui peuuent auoir esté diuulgaez ».[3]

Les nombres qui correspondent aux valeurs de *n* égales à 15, 18, 21, 24 et 28 ont été donnés par FERMAT dans la lettre suivant, que nous reproduisons[4] :

« Lettre de Monsieur, de Fermat à M. de Carcavi
Conseiller au Grand Conseil A Paris.

« MONSIEUR,

Vous m'obligez toujours, & je connais dans la continuation de vos soins celle de vôtre affection, dequoy je vous rends mille graces. Pour la Geométrie, je n'ose pas encore m'y attacher fortement depuis mon incommodité ; je n'auray pourtant pas beaucoup de peine à trouver les

---

[1] Le texte francais de ce cette lettre imprimé dans le volume intitulé « LETTRES DE M[R] DESCARTES. *Où il répond à plusieurs difficultéz, qui luy ont esté proposées sur la Dioptrique, la Geométrie, & sur plusieurs autres sujets.* TOME TROISIESME, ET DERNIER. A PARIS, Chez CHARLES ANGOT, ruë S. Iacques ; au Lion d'Or. M.DC.LXVII. *AVEC PRIVILEGE DV ROY* » (page 458, lig. 3-30, pages 459-460), a dans ce volume (page 458, lig. 3-4) le titre suivant « A MONSIEVR **** , lettre LXXIX ». Le même texte reproduit ensuite dans l'édition publiée par M. Cousin des oeuvres de Descartes (OEUVRES DE DESCARTES, PUBLIEES PAR VICTOR COUSIN. TOME NEUVIEME. A PARIS, CHEZ F. G. LEVRAULT, LIBRAIRE, RUE DES FOSSES-MONSIEUR-LE-PRINCE, N° 31 ; ET STRASBOURG, RUE DES JUIFS, N° 33. M.DCCC.XXV, page 139, lig. 15-22, pages 140-142, page 143, lig. 1-9, a dans cette édition (OEUVRES DE DESCARTES, PUBLIEES PAR VICTOR COUSIN. TOME NEUVIEME, etc., page 143, lig. 15-17, 22) le titre et la date suivants : « A MONSIEUR ****, (Lettre 79 du tome III), 1 1643 ».

Cette lettre parut aussi en latin dans la traduction latine des lettres de Descartes publiée à Amsterdam en 1681 (RENATI DESCARTES EPISTOLÆ, *Partim Latino sermone conscriptœ, partimè Gallico in Latinum versœ.* In quibus respondet ad plures difficultates ipsi propositas in Dioptrica, Geometria, variisque aliarum scientiarum subjectis. *PARS TERTIA. AMSTERDAMI,* Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII. *Sumptibus Societatis,* pages 294-295, page 296, lig. 1-2, EPISTOLA LXXI).

[2] LETTRES DE M[R] DESCARTES, etc. TOME TROISIESME, ET DERNIER, etc., page 459, lig. 19-28. — OEUVRES DE DESCARTES, PUBLIEES PAR VICTOR COUSIN. TOME NEUVIEME, etc., page 141, lig. 20-28, page 142, lig. 1-2.

[3] Dans la traduction latine publiée en 1683 des lettres de Descartes ce passage de la lettre cidessus mentionné est traduit ainsi (RENATI DESCARTES EPISTOLÆ, etc. *PARS TERTIA*, etc., page 295, lig. 3-10) :

« Et ut experimentum fiat diversorum usuum Algebræ posset proponi quoad numeros : *Invenire numerus cujus partes aliquotœ faciunt triplum,* ecce tibi duos, 32760, cujus partes aliquotæ faciunt 98280. Et 30240, cujus partes faciunt 90720. Quæritur etiam tertius cum modo eos inveniendi per regulam aut si nolit quis dare regulam, postulo septem & octo tales numeros, ideo quod olim sex aut septem Parisios miserim, qui possunt esse divulgati ».

[4] VARIA OPERA MATEMATICA, D. PETRI DE FERMAT, etc., page 178, lig. 3-35.— MEMOIRES DE L'ACADEMIE, etc. DE TOULOUSE, etc. Quatrième Série TOME III, etc., page 150, lig. 7-34, page 151, lig. 1-14. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT, etc. PAR E. BRASSINNE, etc., page 150, lig. 7-14, page 151, lig. 1-14.

deux de vos propositions : pour celle de la parabole, je ne l'ay pas examinée ny tentée, je remets tout cecy à ma première commodité. Mais, de peur que vous ne m'accusiez de n'envoyer rien de mon invention, je vous envoye trois nombres parmy plusieurs autres que j'ay trouvés, dont les parties aliquotes font le multiple.

Le nombre suivant est sous-triple de ses parties aliquotes, 14942123276641920.

Celuy-cy est sous-quadruple, 1802582780370364661760.

Et celuy-cy aussi, 87934476737668055040.

Puisque je me trouve sur cette matière, en voicy deux que j'ai choisis parmy mes sous-quintuples.

Le premier se produit des nombres suivans multipliéz entr'eux. 8388608. 2801. 2401. 2197. 2187. 1331. 467. 307. 289. 241. 125. 61. 41. 3l.

Et l'autre se produit des nombres suivans multipliez entr' eux 134217728. 243. 169. 127. 125. 113. 61. 43. 3l. 29. 19. 11. 7.

En voicy encore un sous-double de ses parties de mon invention, lequel, multiplié par 3. fait un sous-triple, ledit nombre est, 51001180160.

C'est parmy quantité d'autres que j'ay trouvez que j'ay choisi par advance ceux-cy pour vous en faire part, afin que vous en puissiéz juger par cet échantillon. J'ay trouvé la méthode générale pour trouver tous les possibles, dequoy je suis assuré que Monsieur de Roberval sera étonné, & le bon Père Mersenne aussi, car il n'y a certainement quoy que ce soit dans toutes les Mathématiques plus difficile que cecy, & hors Monsieur de Frénicle, & peut-être Monsieur Descartes, je doute que personne en connaisse le secret, qui pourtant ne le sera pas pour vous, non plus que mille autres inventions dont je pourray vous entretenir une autrefois, & pour exciter par mon exemple les Sçavans du Païs où vous estez, je leur propose de trouver autant de triangles en nombres qu'on voudra, de même aire, ce que Diophante ny Viète n'ont trouvé que pour trois seulement. Je suis, &c. »

TABLEAU DES NOMBRES PARFAITS ET AUTRES ANALOGUES.

n	FACTEURS PREMIERS DE N	R.	Modes de compositio
2	2×2,	2	Parfait
3	$2^2 \times 7$,	2	Parfait
4	$2^3 \times 3 \times 5$	3	Sous-double
4	$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$	4	Sous-triple
5	$2^4 \times 31$,	2	Parfait
6	$2^5 \times 3 \times 7$,	3	Sous-double
6	$2^5 \times 3 \times 5 \times 7$,	4	Sous-triple
7	$2^6 \times 127$,	2	Parfait
8	$2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 11^2 \times 17 \times 19$,	5	Sous-quadruple
9	$2^8 \times 5 \times 7 \times 19 \times 37 \times 73$,	3	Sous-double
9	$2^8 \times 3 \times 5 \times 7 \times 19 \times 37 \times 73$,	4	Sous-triple
10	$2^9 \times 3 \times 11 \times 31$,	3	Sous-double
10	$2^9 \times 3^3 \times 5 \times 11 \times 31$,	4	Sous-triple
11	$2^{10} \times 3^4 \times 5 \times 7^2 \times 11^2 \times 19 \times 23 \times 89$,	5	Sous-quadruple
13	$2^{12} \times 8191$,	2	Parfait
14	$2^{13} \times 3 \times 11 \times 43 \times 127$,	3	Sous-double
15	$2^{14} \times 5 \times 7 \times 19 \times 31 \times 151$,	3	Sous-double
15	$2^{14} \times 3 \times 5 \times 7 \times 19 \times 31 \times 151$,	4	Sous-triple
17	$2^{16} \times 1\,31071$,	2	Parfait
18	$2^{17} \times 5 \times 7^2 \times 13 \times 19^2 \times 37 \times 73 \times 127$,	5	Sous-quadruple
19	$2^{18} \times 5\,24287$,	2	Parfait
21	$2^{20} \times 3^3 \times 5 \times 7^2 \times 13^2 \times 19 \times 31 \times 61 \times 127 \times 337$,	5	Sous-quadruple
24	$2^{28} \times 3^7 \times 5^8 \times 7^4 \times 11 \times 13^2 \times 17^2 \times 31 \times 41 \times 61 \times 241 \times 307 \times 467 \times 2801$,	6	Sous-quintuple
28	$2^{27} \times 3^5 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 13^2 \times 19 \times 29 \times 31 \times 43 \times 61 \times 113 \times 127$,	6	Sous-quintuple
31	$2^{30} \times (2^{31}-1)$,	2	Parfait
67	$2^{66} \times (2^{67}-1)$,	2	Parfait
127	$2^{126} \times (2^{127}-1)$.	2	Parfait

On trouve encore dans la correspondance de FERMAT un autre genre de problèmes concernant cette théorie. Il s'agit de trouver un cube x^3 dont la somme des diviseurs sont un carré parfait, et par conséquent, lorsque x est premier, de résoudre l'équation[1]

$$1 + x + x^2 + x^3 = y^2$$

M. GERONO[2] a démontré ce théorème curieux, que l'équation ci-dessus n'a que les solutions $x=1$ et $x=7$. Cette dernière solution a été indiquée par FERMAT[3] ; mais lorsque x n'est pas premier, on peut trouver une série indéfinie de cubes dont la somme des, diviseurs est un carré parfait. Dans ce cas, j'ai trouvé pour la plus petite solution

$$x = 2\times3\times5\times13\times41\times47 \,,$$

et l'on a pour la somme des diviseurs

$$[2^7\times3^2\times5^2\times7\times13\times17\times29]^2.$$

Il serait facile de trouver toutes les valeurs de x inférieures à une limite donnée.

§. 2.

SUR LES TRIANGLES RECTANGLES EN NOMBRES ENTIERS.

1. PROBLEME. — *Trouver un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit égale à un carré, ainsi que la somme ou la différence des cotés de l'angle droit.*

En désignant par x, y, z^2, les deux côtés et l'hypoténuse du triangle cherché, on a

$$x + y = u^2 \qquad x^2 + y^2 = z^4.$$

Le problème est donc ramené à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$2X^4 - Y^4 = Z^2$$

que nous avons donnée plus haut ; on a ainsi, en tenant compte des signes, les triangles rectangles ayant pour côtés

$$-\,119,\ \ 120,\ \ 169,$$

$$22\,76953,\ \ -\,4\,73304,\ \ 23\,25625\,;$$

$$456\,54860\,27761,\ \ 106\,16522\,93520,\ \ 468\,72986\,10289,$$

. . . .

[1] VARIA OPERA MATHEMATICA. D. PETRI DE FERMAT, etc., page 188, lig. 24-29, page 191, lig. 1-24. — MEMOIRES DE L'ACADEMIE, etc. DE TOULOUSE, etc. Quatrième Série. TOME III, etc., page 161, lig. 1-7, page 162, lig. 32-35, page 163, lig. 1-25. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE P. FERMAT, etc. PAR E. BRASSINNE, etc., page 161, lig. 1-7, page 162, lig. 32-35, page 163, lig. 1-25.

[2] NOUVELLES ANNALES DE MATHEMATIQUES, JOURNAL, etc. REDIGE PAR MM. GERONO, etc. ET BRISSE, etc. DEUXIEME SERIE TOME SEIZIEME, etc. PARIS, etc. 1877, pages 230-233, page 234, lig. 1-6, MAI 1877.

[3] VARIA OPERA MATHEMATICA D. PETRI DE FERMAT, etc., page 188, lig. 27-29. — MEMOIRES DE L'ACADEMIE, etc. DE TOULOUSE, etc. Quatrième Série. TOME III, etc., page 161, lig. 3-6. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES D. P. FERMAT, etc. PAR BRASSINNE, etc., page 161, lig. 3-6.

formés respectivement des nombres

$$\begin{array}{rcl} 5 & \text{et} & 12, \\ 1517 & \text{et} & 156, \\ 2150905 & \text{et} & 246792, \end{array}$$

les deux premiers triangles sont tels que la différence des côtés de l'angle droit est un carré parfait, et le troisième triangle est tel que la somme des deux côtés de l'angle droit est un carré parfait. C'est pour cette raison.que nous avons conservé chacun des côtés avec le signe convenable. Mais, si l'on s'en tient strictement aux triangles dont les côtés sont supposés positifs, la troisième des solutions précédentes est la plus petite solution, en nombres entiers, d'un problème posé par FERMAT, dans une observation sur le *Traité des doubles égalités* de BACHET DE MEZIRIAC[1] :

« OBSERVATIO D. P. F.
Hvic de duplicatis æqualitatibus tractatui multa possemus adiungere quæ nec veteres nec noui detexerunt, Sufficit nunc, vt methodi nostræ dignitatem & vsum asseramus ut quæstionem sequentem quæ sane difficillima est resoluamus. Invenire triangulum rectangulum numero, cuius hypothenusa sit quadratus, & pariter summa laterum circa rectum. Triangulum quæsitum repræsentant très numeri sequentes 4687298610289, 4565486027761, 1061652293520. *Formatus autem à duobus numeris sequentibus* 2150905. 246792 »[2].

On doit observer que les solutions de l'équation biquadratique considérée plus haut donnent, en même temps, celles du problème suivant :

Trouver deux nombres entiers dont la somme ou la différence soit un carré, et dont la somme des carrés soit égale à un bicarré.

2. PROBLEME. — *Trouver en nombres entiers, un triangle rectangle avec cette condition que le carré de la somme ou de la différence des cotés de l'angle droit, diminué du double du carré du plus petit côté fasse un carré.*

En désignant par x, y les deux côtés de l'angle droit, et par z l'hypoténuse du triangle cherché, on a les conditions

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (x - y)^2 - 2y^2 = u^2 ;$$

Ces équations sont identiques à celles du problème précédent. Ainsi le triangle rectangle dont les côtés sont

$$1517\,, \qquad 156\,, \qquad 1525\,,$$

formés des nombres 39 et 2 satisfait à la question proposée.

---

[1] DIOPHANTI ALFXANDRIN ARITHMETICORUM. LIBRI SEX, ecc. TOLOSÆ, 1670, page 333, lig. 27-33.

[2] M. Brassinne traduit ce passage ainsi (MEMOIRES DE L'ACADEMIE, etc. DE TOULOUSE, etc. Quatrième Série, TOME III, etc., page 125, lig. 15-24. — PRECIS DES OEUVRES MATHEMATIQUES DE FERMAT, PAR BRASSINE, etc., page 125, lig. 15-24) :

« OBS. DE FERMAT. A ce traité des doubles égalites nous pourrions ajouter plusieurs choses que ni les anciens, ni les modernes, n'ont découvertes. Il nous suffit maintenant, pour prouver la dignité et l'usage de notre methode, de résoudre la question suivante, qui est certainement très difficile. Trouver en nombres un triangle rectangle dont l'hypothénuse soit un carré, ainsi que la somme des côtés de l'angle droit. Les trois nombres suivants représentent le triangle cherché, 4687298610289, 4565486027761, 106165223522. Il est formé des deux nombres suivants : 2150905, 246792. »

M. LE PRINCE BONCOMPAGNI a rencontré dernièrement, dans la correspondance du P. MERSENNE et de TORRICELLI, un problème posé et résolu par FERMAT, mais dont l'enoncé et la solution restaient ignonorés. On trouve, en effet, dans un *post-scriptum* d'une lettre adressée par le P. MERSENNE à TORRICELLI, et datée « Festo Natalis Domini anni 1643 »[1], le passage suivant[2] :

« Clarissimus Geometra Senator Tholosanus Fermatius, tibi (per me) sequens problema soluendum proponit, quod duo de Conoideo acuto infinito équivaleat.

Invenire triangulum rectangulum in numeris, cuius latus maius sit quadratum, summaque duorum aliorum laterum etiam sit quadratum, denique summa maioris et medij lateris sit etiam quadratum. Exempli gratia in triangulo 5, 4, 3. oportet 5. esse numerum quadratum, deinde summa 4. et 3. hoc est 7. foret quadratus numerus ; denique summa 5. et 4. hoc est 9. esset quadrata ».

3. Le problème proposé par FERMAT ne diffère pas du problème du §2, au point de vue algébrique, puisqu'il conduit aux mêmes équations ; il en diffère au point de vue arithmétique, à cause des conditions nouvelles introduites dans ce dernier énoncé. Ainsi dans la solution numérique rapportée ci-dessus, pour le troisième triangle, la somme de l'hypoténuse, et du plus petit côté, et non pas de l'hypoténuse et du moyen côté, est un carré parfait. On sait, en effet, que si x *et* y désignent deux nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, les trois côtés d'un triangle rectangle dont les côtés sont entiers, ont respectivement pour valeurs

$$x^2 - y^2 \ , \qquad 2xy \ , \qquad x^2 + y^2 \ .$$

Il résulte de là, que l'hypoténuse augmentée ou diminuée du côté pair est toujours un carré, puisque l'on a l'identité

$$x^2 + y^2 \pm (2xy) = (x \pm y)^2 \ ,$$

qui avait déjà été observée par les auteurs arabes[3].

Par conséquent, pour répondre exactement à la question posée dans la lettre de MERSENNE, on doit continuer le tableau général des solutions du problème du §2 de ce chapitre, jusqu'à ce que l'on ait trouvé un triangle rectangle satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1°. x et y positifs.

2°. Le côté pair est, en même temps, le côté moyen.

On obtient le triangle ayant les plus petits côtés en nombres entiers, à l'aide de la cinquième solution de l'équation biquadratique

$$\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{Y}^4 = \mathrm{Z}^2.$$

En résumé, les côtés les plus petits du triangle cherché paraissent

---

[1] BULLETTINO DI BIBLIOCRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE. PUBBLICATO DA B. BONCOMPAGNI, etc. TOMO VIII. ROMA, etc. 1875,. page 41. lig. 6.

[2] BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA, etc. TOMO VIII, etc., page 411, lig. 10 -16, LUGLLO 1875.

[3] ATTI DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA DE NUOVI'LINCEI, etc. TOMO XIV.— ANNO XIV, etc., page 245, lig. 28-31, SESSIONE IV[a] DEL 3 MARZO 1864. — RECHERCHES SUR PLUSIEURS OUVRAGES DE LEONARD DE PISE, etc. PAR M. F. WOEPCKE, etc. PREMIERE PARTIE, etc. III, etc. , page 17, lig. 19-28.

contenir chacun *deux-cent-vingt-neuf chiffres*, au moins. Il est donc probable que l'illustre FERMAT n'a pas terminé numériquement la solution de ce problème dont l'énoncé serait demeuré ignoré, sans la publication qui en a été faite par M. le Prince BONCOMPAGNI.

4. — PROBLEME. — *Trouver un triangle rectangle dont les côtés soient exprimés en nombres entiers, et dont la surface soit égale à six fois celle d'un carré, comme pour le triangle rectangle dont les côtés sont 3, 4 et 5.*

Les solutions données jusqu'à présent de ce problème ne paraissent pas complètes ; on remarquera, que la solution générale donne deux séries de formules qui permettent de déduire toutes les solutions de deux d'entre elles ; ces solutions, qui sont les plus petites eu nombres entiers ont été données par FERMAT[1] et le P. BILLY[2]. On consultera avec fruit l'ouvrage déjà cité de M. GENOCCHI[3] Les côtés du triangle étant désignés par

$$r^2 - s^2\ , \quad 2rs\ , \quad r^2 + s^2\ ,$$

on doit avoir

$$rs(r^2 - s^2) = \pm\ 6\mathrm{U}^2\ ,$$

d'où ou tire l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes

$$r = 6u^2\ , \quad s = v^2\ , \quad r + s = 4z^2\ , \quad r - s = w^2\ ,$$

ou

$$r = 3u^2\ , \quad s = v^2\ , \quad r + s = 4s^2\ , \quad r - s = 2w^2\ ;$$

on déduit, de cette seconde hypothèse, le système

$$2z^2 - w^2 = v^2\ , \qquad 2z^2 + w^2 = 3u^2\ ,$$

que nous avons résolu complètement [chap. III, §3][4]. La solution immédiate donne le triangle dont les côtés sont

$$3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,$$

et la solution $v = 47$, $u = 33$ donne le triangle

$$72\,16803\ , \qquad 28\,96804\ , \qquad 77\,76485.$$

La première hypothèse conduit au système

$$v^2 - 6u^2 = w^2\ , \qquad v^2 + 6u^2 = z^2$$

---

[1] DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS, etc. TOLOSÆ. etc. M.DC.LXX, page 220, lig. 9-34.

[2] DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM, LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS, etc., DOCTRINÆ ANALYTICÆ INVENTVM NOVVM, *Collectum à R. P. Jacobo de Billy*, etc. page 11, lig. 1-23.

[3] ANNALI DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE COMPILATI DA BARNABA TORTOLINI, etc. *TOMO SESTO*, etc., page 317, lig. 13-19, 35, page 318-320, AGOSTO 1855. — SOPRA TRE SCRITTI INEDITI DI LEONARDO PISANO, etc. *NOTE ANALITICHE* DI ANGELO GENOCCHI, etc., page 105, lig. 13-19, pages 106-108.

[4] Voyez ci-dessus, page 75, lig. 9-34, pages 76-77, page 78, lig. 1-21.

que nous avons complètement résolu au chapitre des nombres congruents ; la solution $u = 2$, $v = 5$, donne le triangle

$$49\ ,\ 1200\ ,\ 1201$$

dont la surface est égale à $6(70)^2$.

Une discussion analogue à la précédente conduit d'ailleurs au théorème suivant qui complète les résultats dus à FIBONACCI et à FERMAT :

THEOREME. — *L'aire d'un triangle rectangle en nombres entiers ne peut être égale à un carré, ni au double, au triple, ou au quintuple d'un carré.*

5.— PROBLEME. — *Trouver un triangle rectangle, en nombres entiers, tel que le carré de l'hypoténuse augmenté du double de l'aire du triangle, soit égale à un carré parfait.*

En désignant par $p^2 - q^2$, $2pq$, $p^2 + q^2$, les trois côtés du triangle cherché, on doit avoir

$$(p^2 + q^2)^2 + 2\,pq(p^2 - q^2) = s^2,$$

ou bien

$$p^4 + 2p^3q + 2p^2q^2 - 2pq^3 + q^4 = s^2\ ;$$

cette équation se ramène à la suivante

$$(1) \qquad x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = z^2,$$

considérée par LEGENDRE, à l'occasion de ce problème :

PROBLEME. — *Trouver trois carrés inégaux tels que la somme de deux quelconques d'entre eux diminuée du troisième, soit un carré parfait.*

Pour la plus petite solution de ce dernier problème LEGENDRE a donné les valeurs suivantes

$$241^2+269^2-149^2=329^2, \quad 269^2+149^2-241^2=191^2, \quad 149^2+241^2-269^2=89^2;$$

mais la solution de l'équation (1) restait incomplète[1].

Nous pouvons supposer x impair et y pair, dans l'équation (1), et en tirer

$$(x^2 - 2y^2)^2 - z^2 = 3y^4\ ;$$

d'où les deux décompositions suivantes

$$x^2 - 2y^2 \pm z = \pm 24r^4, \quad x^2 - 2y^2 \mp z = \pm 2s^4\ , \quad y = 2rs\,,$$

ou

$$x^2 - 2y^2 \pm z = \pm 6r^4, \quad x^2 - 2y^2 \mp z = \pm 8s^4\ , \quad y = 2rs\,.$$

Si nous prenons les signes inférieurs dans le premier des systèmes précédents, ou les signes supérieurs dans le second, nous obtenons les équations

$$8r^2s^2 - 12r^4 - s^4 = x^2, \qquad 8r^2s^2 + 3r^4 + 4s^4 = x^2,$$

---

[1] THEORIE DES NOMBRES. TROISIEME EDITION. PAR ADRIEN-MARIE LEGENDRE. TOME II, etc., pages 126-127.

impossibles suivant le module 4 ; donc, en prenant les autres combinaisons de signes, il nous reste à résoudre les deux équations

$$(2) \qquad 12r^4 + 8r^2s^2 + s^4 = x^2,$$

$$(3) \qquad 3r^4 - 8r^2s^2 + 4s^4 = -x^2.$$

Pour résoudre l'équation (2), nous l'écrivons sous la forme

$$(s^2 + 4r^2)^2 - x^2 = 4r^4 ,$$

et, nous obtenons la décomposition

$$s^2 + 4r^2 \pm x = 2u^4 , \quad s^2 + 4r^2 \mp x = 2v^4 , \quad r = uv.$$

Nous en déduisons, par addition, l'équation

$$u^4 - 4u^2v^2 + v^4 = s^2$$

identique avec l'équation proposée. Elle a pour solution immédiate

$$x_0 = 2 , \quad y_0 = 1 , \quad z_0 = 1 ;$$

par suite

$$x_1 = 15 , \quad y_1 = 4 , \quad z_1 = 191 .$$

Cette solution conduit aux nombres donnés, par LEGENDRE, et que nous avons reproduits plus haut. En général, d'une solution x, y, z, de l'équation (1), on obtient une série indéfinie de solutions nouvelles, au moyen des formules

$$(A) \qquad X = x^4 - y^4 , \quad Y = 2xyz , \quad Z = 12x^4y^4 - z^2,$$

qu'on déduit d'ailleurs des formules de LEBEGUE.

Quant à l'équation (3), nous pouvons l'écrire

$$4(s^2 - r^2)^2 + x^2 = r^4 ,$$

et poser, par suite ,

$$x = u^2 - v^2, \quad s^2 - r^2 = uv, \quad r^2 = u^2 - v^2.$$

Nous en déduisons le système

$$(4) \qquad s = u^2 + v^2 + uv, \quad r^2 = u^2 + v^2.$$

On tire de la seconde

$$u = 2pq, \quad v = p^2 - q^2, \quad r = p^2 + q^2,$$

et, en portant dans la précédente, on obtient

$$(5) \qquad p^4 + 2p^3q + 2p^2q^2 - 2pq^3 + p^4 = s^2$$

Nous retrouvons ainsi l'équation que l'on déduit immédiatement du problème proposé. Nous observerons que la considération du système (4) nous permet de résoudre le problème suivant :

PROBLEME. — *Trouver en nombre entiers deux triangles ayant deux côtés egaux chacun à chacun et dans lesquels l'angle compris est égal à 90 pour le premier triangle, et à 60°, ou à 120°, pour le second.*

On peut écrire le système (5) sous la forme

$$s^2 = (p^2 + pq - q^2)^2 + 3p^2q^2,$$

d'ailleurs u et v sont premiers entre eux, et u désigne un nombre pair ; on peut donc poser

$$p^2 + pq^2 - q^2 + s^2 = \pm\ 6g^2, \quad p^2 + pq^2 - q^2 + s^2 = \pm\ 2h^2, \quad pq = 2gh\ ;$$

d'autre part, il est évident que nous n'avons pas à tenir compte des signes inférieurs. Par conséquent, nous avons

$$p^2 - q^2 = 3g^2 - 2gh - h^2\ ;$$

posons, comme précédemment,

$$p = 2mg, \quad h = mq\ ,$$

nous obtenons, en exprimant que la valeur de m est rationnelle

$$q^4 + 8q^2g^2 + 12g^4 = \mathrm{U}^2,$$

et cette équation se ramène à l'équation (1). On obtiendra donc une série de solutions nouvelles de l'équation (1), à l'aide d'une première x, y, $\pm z$, au moyen des formules

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} m = x^4 - y^4 + xyz, \quad n = 4x^2y^2 + z^2, \\ \mathrm{X} = 16\ m^2n^2x^2y^2z^2 - (4m^2x^2y^2 - n^2z^2)^2, \\ \mathrm{Y} = 2(4m^2x^2y^2 - n^2z^2)(3n^2x^2y^2 + m^2z^2), \\ \mathrm{Z} = 4(3n^2x^2y^2 + m^2z^2)^4 + 3(4m^2x^2y^2 + n^2z^2)^4, \end{array} \right.$$

On trouve ainsi, par exemple,

$$\mathrm{X}=161, \qquad \mathrm{Y}=442, \qquad \mathrm{Z} = 364807.$$

Nous espérons donner dans un prochain travail l'application des formules de sommation exposées dans le Chapitre IV, et des formules de résolution des équations biquadratiques considérées plus haut, à la démonstration d'une série de théorèmes curieux sur les sommes de carrés et de cubes, dont on trouve le point de départ dans les travaux de FIBONACCI et de FERMAT.