Über Matrizen aus nicht negativen Elementen.

Von G. Frobenius.

In meinen Arbeiten *Über Matrizen aus positiven Elementen*, Sitzungsberichte 1908 und 1909, die ich hier mit *P. M.* zitieren werde, habe ich die Eigenschaften der positiven Matrizen entwickelt und durch Grenzbetrachtungen mit den nötigen Modifikationen auf nicht negative übertragen. Die letzteren aber erfordern eine weit eingehendere Untersuchung, worauf ich durch die in § 11 behandelte Aufgabe gekommen bin.

Eine nicht negative Matrix A, die *unzerlegbar* ist, hat fast alle Eigenschaften mit den positiven Matrizen gemeinsam (§ 5). Nur wenn r die größte positive Wurzel oder Maximalwurzel ihrer charakteristischen Gleichung $\varphi(s) = 0$ ist, kann der absolute Betrag einer andern Wurzel zwar nie $> r$, wohl aber $= r$ sein. Jede der k Wurzeln $r, r', r'', \cdots$, die absolut gleich r sind, ist einfach, und ihre Verhältnisse, $1, \frac{r'}{r}, \frac{r''}{r}, \cdots$ sind die k Wurzeln der Gleichung $\rho^k = 1$.

Ist $k = 1$, so nenne ich die Matrix A *primitiv*, ist $k > 1$, *imprimitiv*. Jede Potenz einer primitiven Matrix ist wieder primitiv, eine gewisse Potenz und jede folgende ist positiv.

Ist A imprimitiv, so besteht A^m aus d unzerlegbaren *Teilen*, wo d der größte gemeinsame Divisor von m und k ist, und zwar zerfällt A^m *vollständig*. Die charakteristischen Funktionen der Teilmatrizen unterscheiden sich nur durch Potenzen von s untereinander.

Die Matrix A^k ist die niedrigste Potenz von A, deren unzerlegbare Teile alle primitiv sind. Die Anzahl dieser Teile ist dem Exponenten k gleich. Ist

$$\psi(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_m$$

die charakteristische Funktion eines dieser k Teile, so ist

$$\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots + a_m s^{n-mk} = s^{n-mk}\psi(s^k)$$

die von A. Die Maximalwurzel r^k der Gleichung $\psi(s) = 0$ ist absolut größer als jede andere Wurzel.

In § 11 dehne ich die Untersuchung auf zerlegbare Matrizen aus, und in § 12 zeige ich, daß eine solche nur auf eine Art in unzerlegbare Teile zerfällt werden kann. Dabei ergibt sich der merkwürdige Determinantensatz:

I. *Die Elemente einer Determinante $n$ten Grades seien n^2 unabhängige Veränderliche. Man setze einige derselben Null, doch so, daß die Determinante nicht identisch verschwindet. Dann bleibt sie eine irreduzible Funktion, außer wenn für einen Wert $m < n$ alle Elemente verschwinden, die m Zeilen mit $n-m$ Spalten gemeinsam haben.*

§ 1.

Ist die Matrix $n$ten Grades $A > 0$, und ist q_m $(m \leqq n)$ die Maximalwurzel der Gleichung

$$A_m(s) = \begin{vmatrix} -a_{11}+s & \cdots & -a_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mm}+s \end{vmatrix} = 0,$$

so ist $q_1 < q_2 < \cdots < q_n = r$ (*P. M.* § 1). Ist A nicht negativ, so ergibt sich auf demselben Wege durch eine Grenzbetrachtung, daß

$$q_1 \leqq q_2 \leqq \cdots \leqq q_n = r$$

ist. Daraus folgt, falls $A \geqq 0$ und r die Maximalwurzel von A ist:

II. *Wenn eine Hauptunterdeterminante $P(s)$ von $A(s)$ für $s = r$ verschwindet, so verschwinden auch alle Hauptunterdeterminanten von $A(r)$, die $P(r)$ enthalten. Ist aber $P(r) > 0$, so sind auch alle Hauptunterdeterminanten jeden Grades von $P(r)$ positiv.*

Ist $A > 0$, so haben die n linearen Gleichungen

$$(1.) \qquad a_{\varkappa 1}x_1 + \cdots + a_{\varkappa n}x_n = rx_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n)$$

nur eine Lösung, falls man von einem gemeinsamen Faktor absieht, und diesen kann man so wählen, daß die Werte der Unbekannten alle positiv werden. Aber auch wenn $A \geqq 0$ ist, kann man diesen Gleichungen immer durch Werte genügen, die alle nicht negativ, und nicht alle Null sind. Denn da ihre Determinante $A(r) = 0$ ist, so ist eine dieser Gleichungen, etwa die αte, eine Folge der $n-1$ andern, und kann daher weggelassen werden. Die übrig bleibenden seien (vgl. *P. M.* § 1)

$$\begin{array}{c} -(a_{\beta\beta}-r)x_\beta - \cdots - a_{\beta\nu}x_\nu = a_{\beta\alpha}x_\alpha, \\ \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot \\ -a_{\nu\beta}x_\beta - \cdots - (a_{\nu\nu}-r)x_\nu = a_{\nu\alpha}x_\alpha. \end{array}$$

Ist $B(r)$ ihre Determinante und q die Maximalwurzel der Gleichung $B(s) = 0$, so ist $q \leqq r$. Ist $q = r$, also $B(r) = 0$, so setze man $x_\alpha = 0$. Dann erhält man $n-1$ homogene lineare Gleichungen zwischen den $n-1$ Unbekannten $x_\beta, \cdots x_\nu$ von derselben Beschaffenheit wie die n Gleichungen (1.). Da ihre Anzahl nur $n-1$ ist, so kann man annehmen, daß für sie die Behauptung bereits bewiesen ist.

Ist aber $q < r$, so ist nicht nur die Determinante $B(r) > 0$, sondern es sind auch, wie eine Grenzbetrachtung zeigt, ihre Unterdeterminanten $B_{\varkappa\lambda}(r) \geqq 0$. Setzt man dann $x_\alpha = 1$, so wird

$$B(r)x_\beta = \sum_\tau B_{\beta\tau}(r)a_{\tau\alpha}, \cdots \qquad B(r)x_\nu = \sum_\tau B_{\nu\tau}(r)a_{\tau\alpha}.$$

Mithin ist $x_\beta \geqq 0, \cdots x_\nu \geqq 0$ und $x_\alpha > 0$.

§ 2.

Eine Matrix oder Determinante des Grades $p+q$ nenne ich *zerfallend* oder *zerlegbar*, wenn darin alle Elemente verschwinden, welche p Zeilen mit den q Spalten gemeinsam haben, deren Indizes den Indizes der p Zeilen *komplementär* sind (sie zu $1, 2, \cdots p+q$ ergänzen). Unter den pq Elementen, deren Verschwinden die Zerlegbarkeit der Matrix bedingt, kommt also kein Hauptelement $a_{\lambda\lambda}$ vor. Sei z. B.

$$A = \begin{pmatrix} P & V \\ U & Q \end{pmatrix},$$

seien P und Q Matrizen der Grade p und q, V eine Matrix von p Zeilen und q Spalten, U eine Matrix von q Zeilen und p Spalten. Dann *zerfällt* A in die *komplementären Teile* P und Q, wenn $U = 0$ oder $V = 0$ ist. Ist $U = 0$ und $V = 0$, so heißt A *vollständig zerlegbar*.

Dasselbe gilt, wenn A erst nach einer Umstellung der Zeilen und der *entsprechenden* Umstellung der Spalten auf jene Form gebracht werden kann. Eine solche *kogrediente Permutation* der Zeilen und Spalten, wobei die Hauptelemente nur unter sich vertauscht werden und konjugierte Elemente konjugiert bleiben, ist im folgenden immer gemeint, wo von einer *Umstellung der Reihen* einer Matrix gesprochen wird.

Jeder der beiden *Teile* oder *Teilmatrizen* kann weiter zerlegbar sein. So zerfällt die Matrix der Determinante

$$(1.) \qquad \begin{vmatrix} P & 0 & 0 \\ U & Q & V \\ W & 0 & R \end{vmatrix} = |P|\,|Q|\,|R|$$

in die 3 Teile P, Q und R, die verschwindenden Matrizen können in jedem der weiter zerlegbaren Teile beliebig links oder rechts von der Diagonale stehen. Durch Umstellung der Reihen kann man die Matrix auf die Formen

$$\begin{matrix} P & 0 & 0 \\ W & R & 0 \\ U & V & Q \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} Q & V & U \\ 0 & R & W \\ 0 & 0 & P \end{matrix}$$

bringen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man daher in die Definition der Zerlegbarkeit die Bedingung aufnehmen, daß die Elemente, deren Verschwinden das Zerfallen der Matrix bedingt, alle rechts von der Diagonale stehen, oder alle links.

§ 3.

Ist A, wie stets im folgenden, eine nicht negative Matrix, und zerfällt die Determinante $A(s)$ in die Teile $P(s), Q(s), R(s), \cdots$, so muß einer dieser Faktoren, also eine Hauptunterdeterminante von $A(s)$ für $s = r$ verschwinden. Umgekehrt gilt der Satz:

III. *Wenn eine Hauptunterdeterminante P von $A(r)$ verschwindet, so zerfällt $A(r)$. Wenn außerdem keine Hauptunterdeterminante von P verschwindet, so ist P einer der unzerlegbaren Teile von $A(r)$.*

Sei $P = A_m(r)$, seien $P_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots m)$ die Unterdeterminanten $(m-1)$ten Grades von P, sei stets $P_{\varkappa\varkappa} > 0$. Ist $P = 0$, so ist $P_{\varkappa\lambda}P_{\lambda\varkappa} = P_{\varkappa\varkappa}P_{\lambda\lambda}$, also nicht $P_{\varkappa\lambda} = 0$, und mithin $P_{\varkappa\lambda} > 0$.

Daher kann man den m linearen Gleichungen

$$a_{1\varkappa}y_1 + \cdots + a_{m\varkappa}y_m = ry_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots m)$$

durch Werte genügen, die alle positiv sind. Ist Y eine Matrix von nur einer Zeile $y_1, y_2, \cdots y_m$, so kann man diese Gleichungen in der Gestalt $YP = 0$ schreiben, wo jetzt P die Matrix der Determinante $A_m(r)$ bezeichnet. Ebenso kann man die n Gleichungen

$$(1.) \qquad a_{\alpha 1}x_1 + \cdots + a_{\alpha n}x_n = rx_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

in der Gestalt $AX = rX$ schreiben, falls X eine Matrix von nur einer Spalte ist, worin die n nicht negativen Größen $x_1, x_2, \cdots x_n$ untereinander stehen. Wir teilen X in U und Z, wo U die Größen $x_1, \cdots x_m$, Z die Größen $x_{m+1}, \cdots x_n$ enthält. Ist

$$rE - A = \begin{pmatrix} P & L \\ M & N \end{pmatrix},$$

so nehmen die Gleichungen (1.) die Gestalt

$$PU + LZ = 0,$$
$$MU + NZ = 0$$

an. Dann ist $Y(PU + LZ) = 0$, also weil $YP = 0$ ist, $Y(LZ) = 0$, und da $Y > 0$ und $LZ \leqq 0$ ist, $LZ = 0$, mithin auch $PU = 0$.

Sind $x_{m+1}, \cdots x_n$ alle positiv, ist also $Z > 0$, so ist $L = 0$, da die Elemente von L alle negativ oder Null sind. (Das letztere gilt auch von M, aber nicht von den Diagonalmatrizen P und N.)

Sind dagegen $x_{m+1}, \cdots x_n$ alle Null, ist also $Z = 0$, so sind $x_1, \cdots x_m$ nicht alle Null und genügen der Gleichung $PU = 0$. Da diese aber nur eine Lösung hat, so ist $U>0$ (weil die Größen $P_{\varkappa\lambda}$ alle >0 sind). Nun ist $MU+NZ=0$, also da $Z=0$, $U>0$ ist, $M=0$.

Ist aber $L=0$ oder $M=0$, so zerfällt $A(r)$ in zwei Teile, von denen der eine P ist.

Endlich seien von den Größen $x_{m+1}, \cdots x_n$ einige Null, die andern positiv. Dann besteht Z aus zwei Abteilungen V und W, von denen $V=0$ und $W>0$ ist. Teilt man L, M, N entsprechend ein, so wird nach passender Umstellung der Reihen

$$rE-A = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{pmatrix},$$

und die Gleichungen (1.) nehmen die Gestalt an

$$\begin{aligned} P\ U + Q\ V + R\ W &= 0, \\ P'\ U + Q'\ V + R'\ W &= 0, \\ P''U + Q''V + R''W &= 0. \end{aligned}$$

Wie oben gezeigt, zerfällt die erste in $PU=0$ und $QV+RW=0$. Da aber $V=0$ und $W>0$ ist, so ist $R=0$.

Die zweite Gleichung lautet, da $V=0$ ist, $P'U+R'W=0$. Da $P'\leqq 0$, $R'\leqq 0$ und $U\geqq 0$, $W>0$ ist, so muß einzeln $P'U=0$ und $R'W=0$ und mithin $R'=0$ sein.

Demnach ist $R=0$ und $R'=0$, und folglich zerfällt $A(r)$ in $|R''|$ und

$$T(r) = \begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix}.$$

Da die Matrix dieser Determinante P enthält und in $rE-A$ enthalten ist, so ist r nach Satz II in § 1 die Maximalwurzel der Gleichung $T(s)=0$. In $T(r)$ verschwindet die Hauptunterdeterminante $m$ten Grades P. Endlich ist der Grad von $T(r)$ kleiner als der von $A(r)$. Daher können wir für $T(r)$ den behaupteten Satz bereits als erwiesen ansehen. Demnach zerfällt $T(r)$ in Teile, deren einer P ist, und folglich gilt dasselbe von $A(r)$.

§ 4.

Ist A unzerlegbar, so verschwindet keine der Größen $A_{\alpha\alpha}(r)$, und mithin ist r eine einfache Wurzel der charakteristischen Gleichung $\varphi(s)=0$. Wenn umgekehrt keine Hauptunterdeterminante $(n-1)$ten Grades von $A(r)$ verschwindet, so ist A unzerlegbar. Da $A_{\alpha\beta}(r)A_{\beta\alpha}(r) = A_{\alpha\alpha}(r)A_{\beta\beta}(r)$ ist, so ist auch $A_{\alpha\beta}(r)>0$. (Ist $A_{\alpha\alpha}(r)=0$, aber $A_{\beta\beta}(r)>0$, so verschwindet $A_{\alpha\beta}(s)A_{\beta\alpha}(s)$ identisch.)

Die adjungierte Matrix B von $rE - A$ ist also positiv. Daraus ergibt sich ein Satz, der dem Satze von MASCHKE in der Gruppentheorie analog ist. Ist nämlich

$$\varphi(r, s) = \frac{\varphi(r) - \varphi(s)}{r - s},$$

so ist

$$B = \varphi(r, A) \tag{1.}$$

eine ganze Funktion von A, eine lineare Verbindung von $A^0, A^1, \cdots A^{n-1}$. Die Elemente von A^k seien $a_{\alpha\beta}^{(k)}$.

IV. *In einer unzerlegbaren Matrix können bei keiner Wahl der Indizes die n Größen*

$$a_{\alpha\beta}^{(0)}, \quad a_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad a_{\alpha\beta}^{(2)}, \cdots \quad a_{\alpha\beta}^{(n-1)}$$

sämtlich verschwinden (kann nicht identisch $A_{\alpha\beta}(s) = 0$ sein).

Denn sonst wäre auch das Element $b_{\alpha\beta} = 0$, während doch $b_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(r) > 0$ ist. In einer zerlegbaren Matrix kann man aber α und β so wählen, daß $a_{\alpha\beta}^{(k)}$ für jeden Wert von k verschwindet (daß also $A_{\alpha\beta}(s)$ identisch verschwindet). Denn ist

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ L & Q \end{pmatrix},$$

so ist

$$A^k = \begin{pmatrix} P^k & 0 \\ L_k & Q^k \end{pmatrix}.$$

Jeder der unzerlegbaren Teile $P(s), Q(s), R(s), \cdots$ von $A(s)$, der für $s = r$ Null wird, verschwindet nur von der ersten Ordnung. Daraus folgt:

V. *Damit die Maximalwurzel r der Gleichung $A(s) = 0$ eine k fache sei, ist notwendig und hinreichend, daß von den unzerlegbaren Teilen von $A(s)$ genau k für $s = r$ verschwinden.*

Daraus schließt man leicht:

VI. *Ist die Maximalwurzel r der Gleichung $A(s) = 0$ eine mehrfache, so ist sie entweder gleich dem größten der Hauptelemente $a_{\alpha\alpha}$, oder in jeder Hauptunterdeterminante $(n-1)$ ten Grades verschwindet für $s = r$ eine Hauptunterdeterminante $(n-2)$ ten Grades.*

Ist insbesondere $r = 0$, so verschwinden die Hauptunterdeterminanten jeden Grades von A, und daher zerfällt A in n Teile ersten Grades. Ist z. B. $n = 4$, so kann jede Matrix vierten Grades durch Umstellung der Reihen auf die Form

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{matrix}$$

gebracht werden, wenn alle zyklischen Produkte

$$a_{\alpha\alpha} = 0\,, \quad a_{\alpha\beta}\,a_{\beta\alpha} = 0\,, \quad a_{\alpha\beta}\,a_{\beta\gamma}\,a_{\gamma\alpha} = 0\,, \quad a_{\alpha\beta}\,a_{\beta\gamma}\,a_{\gamma\delta}\,a_{\delta\alpha} = 0$$

sind.

§ 5.

Ist q die Maximalwurzel der Gleichung $A_{\alpha\alpha}(s) = 0$, so ist $q \leqq r$. Ist also $s > r$, so ist auch $s > q$ und mithin ist $A_{\alpha\alpha}(s) > 0$. Hat p dieselbe Bedeutung wie in *P. M.* § 1, so gilt der Satz:

VII. *Wenn $A_{\alpha\beta}(s)$ $(\alpha \neq \beta)$ für einen Wert $s > r$ (oder auch nur $s > p$) Null ist, so verschwindet $A_{\alpha\beta}(s)$ identisch.*

Denn sei $s_0 > p$ ein solcher Wert. Da für alle benachbarten Werte $A_{\alpha\beta}(s) \geqq 0$ ist, so verschwindet auch die Ableitung $A'_{\alpha\beta}(s)$ für $s = s_0$. Nun ist aber

$$-A_{\alpha\beta}(s) = \begin{vmatrix} -a_{\alpha\beta} & -a_{\alpha\gamma} & \cdots & -a_{\alpha\nu} \\ -a_{\gamma\beta} & -a_{\gamma\gamma}+s & \cdots & -a_{\gamma\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_{\nu\beta} & -a_{\nu\gamma} & \cdots & -a_{\nu\nu}+s \end{vmatrix}.$$

Daher ist $A'_{\alpha\beta}(s)$ eine Summe von $n-2$ Determinanten $(n-2)$ten Grades, $A_\gamma(s) + \cdots + A_\nu(s)$, die zu den Hauptunterdeterminanten $A_{\gamma\gamma}(s), \cdots A_{\nu\nu}(s)$ in derselben Beziehung stehen wie $A_{\alpha\beta}(s)$ zu $A(s)$. Hat p_γ für $A_{\gamma\gamma}(s)$ dieselbe Bedeutung wie p für $A(s)$, so ist $p_\gamma \leqq p$. Ist also $s > p$, so ist auch $s > p_\gamma$. Folglich ist $A_\gamma(s) \geqq 0$, und mithin verschwindet für $s = s_0$ jede der Determinanten $A_\gamma(s), \cdots A_\nu(s)$, und zwar jede nebst ihrer Ableitung. So erkennt man, daß alle Ableitungen von $A_{\alpha\beta}(s)$ für $s = s_0$ verschwinden, und mithin verschwindet diese Funktion identisch.

Nun ist aber

$$A(s)\,C(s) = A_{\alpha\alpha}(s)\,A_{\beta\beta}(s) - A_{\alpha\beta}(s)\,A_{\beta\alpha}(s).$$

Ist also identisch $A_{\alpha\beta}(s) = 0$, oder ist auch nur $A_{\alpha\beta}(r) = 0$, so verschwindet eine der beiden Größen $A_{\alpha\alpha}(r)$ oder $A_{\beta\beta}(r)$, und mithin ist A zerlegbar.

VIII. *Ist A unzerlegbar, so sind die Unterdeterminanten $A_{\alpha\beta}(s)$ für jeden Wert $s \geqq r$ positiv.*

Eine *nicht negative unzerlegbare* Matrix besitzt demnach die meisten Eigenschaften einer *positiven* Matrix: Die Maximalwurzel r der Gleichung $A(s) = 0$ ist einfach, die Unterdeterminanten $(n-1)$ten Grades und die Hauptunterdeterminanten jeden Grades von $A(s)$ sind positiv, falls $s \geqq r$ ist.

Ist aber r' irgendeine von r verschiedene Wurzel, so ist stets $r \geqq |r'|$, aber nicht notwendig $r > |r'|$. Eine unzerlegbare nicht negative Matrix nenne ich *primitiv*, wenn ihre Maximalwurzel absolut größer ist als jede andre Wurzel, *imprimitiv*, wenn sie dem absoluten Betrage einer andern Wurzel gleich ist.

§ 6.

IX. *Von jeder primitiven Matrix ist eine Potenz positiv. Ist A^p die niedrigste, so sind es auch alle folgenden $A^{p+1}, A^{p+2}, \cdots$ Umgekehrt ist eine Matrix primitiv, wenn eine ihrer Potenzen positiv ist.*

Ist A^p positiv, so ist A unzerlegbar. Sonst wäre auch jede Potenz von A zerlegbar und enthielte verschwindende Elemente. Ferner ist stets $r^p > |r'^p|$, und mithin $r > |r'|$. Folglich ist A primitiv. Diese Bemerkung hat schon Hr. PERRON am Schluß seiner Arbeit gemacht.

Ist P irgendeine positive Matrix, und A eine unzerlegbare, so ist auch $PA = Q$ positiv. Denn wäre $q_{\alpha\beta} = \sum p_{\alpha\lambda}\, a_{\lambda\beta} = 0$, so wäre $a_{1\beta} = \cdots = a_{n\beta} = 0$, also A zerlegbar. Daher ist auch $QA = PA^2$ positiv usw.

Hat umgekehrt A eine einfache Wurzel r, die absolut größer ist als jede andere Wurzel r', so ist (*P. M.* § 3)

$$\lim \frac{a_{\alpha\beta}^{(k)}}{r^k} = \frac{A_{\alpha\beta}(r)}{\varphi'(r)} \qquad (k = \infty).$$

Ist A unzerlegbar, so ist nach Satz VIII der Grenzwert positiv, mithin muß auch, falls k eine gewisse Grenze überschreitet, für je zwei Indizes $a_{\alpha\beta}^{(k)} > 0$, also $A^k > 0$ sein.

Da hier aber Grenzbetrachtungen benutzt sind, so werde ich von diesem Ergebnis nicht eher Gebrauch machen, bis ich es auch algebraisch bewiesen habe.

X. *In einer imprimitiven Matrix sind die Hauptelemente sämtlich Null.*

Jedes Element $a_{\alpha\beta}^{(k)}$ von A^k ist eine Summe von Produkten nicht negativer Größen, also positiv, sobald eins dieser Produkte positiv ist. Ist $a_{11} > 0$, so ist auch $a_{11}^{(k)} > 0$, weil es das Glied a_{11}^k enthält. Nach Satz IV gibt es eine Zahl $k < n$, wofür $a_{\alpha 1}^{(k)} > 0$ ist. In $A^{k+1} = A^k A$ ist dann auch $a_{\alpha 1}^{(k+1)} > 0$, weil es das Glied $a_{\alpha 1}^{(k)} a_{11}$ enthält. Ist $a_{1\beta}^{(l)} > 0$, so ist es auch $a_{1\beta}^{(l+1)}$ in $A^{l+1} = AA^l$. Spätestens für $k = l = n-1$ sind demnach die $2n-1$ Größen

$$a_{\alpha 1}^{(k)} \quad , \quad a_{1\beta}^{(k)} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

sämtlich von Null verschieden. Folglich ist in $A^{k+l} = A^k A^l$ jedes Element $a_{\alpha\beta}^{(k+l)} > 0$, weil es das Glied $a_{\alpha 1}^{(k)} a_{1\beta}^{(l)}$ enthält. Ist aber $A^p > 0$, so ist A primitiv.

Ist umgekehrt A imprimitiv, so müssen daher $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$ sämtlich verschwinden, oder es muß, was dasselbe ist, ihre Summe

$$(1.)\qquad a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn} = r+r_1+\cdots+r_{n-1} = 0$$

sein, falls

$$(2.)\qquad \varphi(s) = (s-r)(s-r_1)\cdots(s-r_{n-1})$$

gesetzt wird. In jeder Potenz einer imprimitiven Matrix gibt es demnach verschwindende Elemente. Dies ist selbstverständlich, wenn die Matrix A^m zerlegbar ist. Ist sie aber unzerlegbar, so ist sie imprimitiv, weil $|r'^m| = r^m$ ist, und dann verschwinden alle Hauptelemente.

XI. *Jede Potenz einer primitiven Matrix ist primitiv. Sind umgekehrt $A, A^2 \cdots A^n$ unzerlegbar, so ist A primitiv.*

Da die Matrix (1.) § 4 positiv ist, so ist es auch die Matrix BA, die eine lineare Verbindung von $A, A^2 \cdots A^n$ ist. Daher können die n Größen

$$a_{11}, a_{11}^{(2)} \cdots a_{11}^{(n)}$$

nicht alle verschwinden. Ist $a_{11}^{(m)} > 0$ und ist A imprimitiv, so ist A^m zerlegbar. Denn wäre A^m unzerlegbar, so wäre diese Matrix imprimitiv, und es wäre $a_{11}^{(m)} = 0$.

Sind also umgekehrt $A, A^2, \cdots A^n$ unzerlegbar, so muß A primitiv sein.

Der Beweis der ersten Hälfte des Satzes XI sowie der des Satzes IX, woraus jene sofort folgt, beruht auf den folgenden Überlegungen.

§ 7.

Ist A unzerlegbar, so sind die Größen $A_{\alpha\beta}(r)$ alle positiv. Daher haben die n linearen Gleichungen

$$(1.)\qquad a_{\alpha 1}x_1+\cdots+a_{\alpha n}x_n = rx_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n),$$

falls man von einem gemeinsamen Faktor absieht, nur eine Lösung, und darin können $x_1, \cdots x_n$ alle positiv angenommen werden. Dasselbe gilt von den Gleichungen

$$(2.)\qquad a_{1\beta}y_1+\cdots+a_{n\beta}y_n = ry_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \cdots n).$$

Betrachten wir die n Größen $y_1, \cdots y_n$ als eine Matrix Y von nur einer Zeile. Ebenso sei X die Matrix, worin $x_1, \cdots x_n$ in einer Spalte untereinander stehen. Dann ist $X > 0$ und $Y > 0$, und die Gleichungen (1.) und (2.) lauten

$$(3.)\qquad AX = rX \quad , \quad YA = rY.$$

Sei umgekehrt Z eine Matrix, worin in einer Spalte n Größen $z_1, \cdots z_2$ stehen, die alle nicht negativ, und nicht alle Null sind. Bestehen dann n Gleichungen $AZ = sZ$, so muß zunächst $\varphi(s) = 0$ sein. Ferner ist

$$YAZ = (YA)Z = rYZ = Y(AZ) = sYZ.$$

Die Matrix YZ ist vom ersten Grade und besteht aus der Größe $y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n > 0$. Mithin ist $s = r$. Die linearen Gleichungen $AX = sX$ oder $YA = sY$ können also nur dann eine Lösung haben, deren Elemente alle nicht negativ und nicht alle Null sind, wenn $s = r$ ist, und dann sind die Unbekannten alle positiv.

Nun sei A unzerlegbar, aber A^m zerlegbar. Nach passender Umstellung der Reihen von A können wir also

$$A^m = \begin{array}{ccccc} R_{11} & 0 & 0 & 0 & . \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 & . \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & . \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & . \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

setzen, wo die Teilmatrizen $R_{11}, R_{22}, \cdots$ unzerlegbar sind, und $R_{\alpha\beta} = 0$ ist, falls $\beta > \alpha$ ist.

Bestimmt man X und Y, wie oben, so ist auch

$$A^m X = r^m X, \quad YA^m = r^m Y.$$

Sei m_λ der Grad von $R_{\lambda\lambda}$, sei X_1 das System der ersten m_1 der Größen $x_1, \cdots x_n$, X_2 das der folgenden m_2 usw. Dann ist

$$(4.)\qquad \sum_\beta R_{\alpha\beta} X_\beta = sX_\alpha, \quad \sum_\alpha Y_\alpha R_{\alpha\beta} = sY_\beta,$$

wo $s = r^m$ ist. Die ersten dieser Gleichungen lauten

$$(5.)\qquad R_{11} X_1 = sX_1$$

und

$$\sum Y_\alpha R_{\alpha 1} = sY_1, \quad \sum Y_\alpha R_{\alpha 1} X_1 = sY_1 X_1,$$

also weil das erste Glied dieser Summe $Y_1(R_{11}X_1) = sY_1X_1$ ist,

$$Y_2 R_{21} X_1 + Y_3 R_{31} X_1 + Y_4 R_{41} X_1 + \cdots = 0,$$

und da jedes Glied $\geqq 0$ ist, $Y_2 R_{21} X_1 = 0$. Besteht die Matrix R_{21} aus den Größen $c_{\varkappa\lambda}$, so besteht $Y_2 R_{21} X_1$ aus der einen Größe $\sum y_\varkappa c_{\varkappa\lambda} x_\lambda$. Da x_λ und $y_\varkappa$ positiv sind, so ist $c_{\varkappa\lambda} = 0$, also

$$R_{21} = 0, \quad R_{31} = 0, \quad R_{41} = 0, \cdots.$$

Demnach lauten die zweiten der Gleichungen (4.)

$$(6.)\qquad R_{22} X_2 = sX_2$$

und

$$\sum Y_\alpha R_{\alpha 2} = sY_2, \quad \sum Y_\alpha R_{\alpha 2} X_2 = sY_2 X_2.$$

Da $R_{12} = 0$ ist, so ist das erste Glied dieser Summe $Y_2 R_{22} X_2 = s Y_2 X_2$, und mithin ist

$$R_{32} = 0, \quad R_{42} = 0, \quad R_{52} = 0, \cdots,$$

allgemein $R_{\alpha\beta} = 0$, falls $\alpha > \beta$ ist. Daher zerfällt

$$A^m = \begin{matrix} R_{11} & 0 & 0 & . \\ 0 & R_{22} & 0 & . \\ 0 & 0 & R_{33} & . \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

vollständig.

XII. *Zerfällt eine Potenz einer unzerlegbaren Matrix, so ist sie vollständig zerlegbar.*

Ferner zeigen die Gleichungen (5.) und (6.), daß jeder der unzerlegbaren Teile $R_{\lambda\lambda}$ die Wurzel r^m hat.

Da r eine einfache Wurzel von A ist, so ist dies nur möglich, wenn A eine von r verschiedene Wurzel r' besitzt, deren $m$te Potenz $r'^m = r^m$ ist. Folglich ist $|r'| = r$ und A imprimitiv.

Wenn also A primitiv ist, so ist jede Potenz von A unzerlegbar, und demnach, weil stets $r'^m < r^m$ ist, primitiv. Ferner gibt es, wie schon oben gezeigt, eine Potenz A^m, worin $a_{11}^{(m)} > 0$ ist. Da außerdem A^m unzerlegbar ist, so ist nach den Überlegungen im Beweise des Satzes X eine Potenz von A^m positiv. Damit sind die Sätze IX und XI vollständig bewiesen. Aus der obigen Entwicklung ergibt sich noch das Resultat:

XIII. *Ist A eine zerfallende Matrix, und haben sowohl die Gleichungen $AX = rX$ als auch die Gleichungen $YA = rY$ eine positive Lösung, so zerfällt A vollständig, und jeder unzerlegbare Teil von A hat die Maximalwurzel r.*

§ 8.

Wenn A unzerlegbar ist, so ist nach Satz III die Maximalwurzel der Gleichung $A_{\alpha\alpha}(s) = 0$ $q < r$. Ist q' irgendeine andre Wurzel dieser Gleichung, so ist $|q'| \leqq q < r$. Sei A imprimitiv und seien

(1.) $$r, \quad r', \quad r'', \cdots$$

alle Wurzeln von A, deren absoluter Betrag gleich r ist. Da $|r'| > q$ ist, so ist $A_{\alpha\alpha}(r')$ von Null verschieden, und da

$$A_{\alpha\beta}(r')\, A_{\beta\alpha}(r') = A_{\alpha\alpha}(r')\, A_{\beta\beta}(r')$$

ist, so ist es auch $A_{\alpha\beta}(r')$. Mithin haben die n linearen Gleichungen

$$AZ = r'Z$$

nur eine Lösung, und deren Elemente $z_1, \cdots z_n$ sind alle von Null verschieden. Dann ist aber auch

$$A^m Z = r'^m Z,$$

also

$$R_{11} Z_1 = r'^m Z_1, \quad R_{22} Z_2 = r'^m Z_2, \dots .$$

Folglich hat jeder der unzerlegbaren Teile $R_{\lambda\lambda}$ die Wurzeln

$$(2.) \qquad r^m, \quad r'^m, \quad r''^m, \dots .$$

Sind diese nicht alle gleich r^m, so ist jeder Teil $R_{\lambda\lambda}$ imprimitiv, und mithin zerfällt eine Potenz von A^m in eine größere Anzahl von Teilen wie A^m. Da die Anzahl der Teile nicht $> n$ sein kann, so muß es eine Potenz A^m geben, die in lauter primitive Teile zerfällt. Dann ist $r^m = r'^m = r''^m = \cdots$, und folglich sind

$$(3.) \qquad 1, \quad \frac{r'}{r}, \quad \frac{r''}{r}, \dots$$

Wurzeln der Gleichung $\rho^m = 1$.

In jedem unzerlegbaren Teile $R_{\lambda\lambda}$ von A^m ist r^m die größte positive Wurzel, also einfach. Die Anzahl dieser Teile ist demnach gleich der Anzahl der Größen (2.), die gleich r^m sind. Wählt man m so, daß die Einheitswurzeln (3.) alle der Gleichung $\rho^m = 1$ genügen, so sind die Größen (2.) alle gleich r^m, $R_{\lambda\lambda}$ hat keine von r^m verschiedene Wurzel vom absoluten Betrage r^m und ist daher primitiv.

Der kleinste Exponent k, wofür A^k in lauter primitive Teile $R_{\lambda\lambda}$ zerfällt, ist folglich gleich dem kleinsten Exponenten k, wofür die Größen (3.) alle der Gleichung $\rho^k = 1$ genügen. Ist dann m nicht durch k teilbar, so genügen die Größen (3.) nicht alle der Gleichung $\rho^m = 1$, sind die Größen (2.) nicht alle gleich r^m, ist jeder Teil $R_{\lambda\lambda}$ von A^m imprimitiv, sind die Hauptelemente von $R_{\lambda\lambda}$ alle Null.

Ist also m nicht durch k teilbar, so verschwindet die Summe der Hauptelemente von A^m

$$s_m = r^m + r_1^m + \cdots + r_{n-1}^m = 0.$$

Mithin ist auch $c_m = 0$, wenn

$$\varphi(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + \cdots + c_n$$

ist. Dies folgt aus den NEWTONschen Formeln

$$s_m + c_1 s_{m-1} + \cdots + c_{m-1} s_1 + m c_m = 0.$$

Denn wenn es für $c_1, \cdots c_{m-1}$ schon bewiesen ist, so ist in jedem der m ersten Glieder $c_\varkappa s_\lambda$ entweder $c_\varkappa = 0$ oder $s_\lambda = 0$, weil $\varkappa + \lambda = m$ ist, also $\varkappa$ und λ nicht beide durch k teilbar sind. Folglich ist auch $c_m = 0$. Demnach ist

$$(4.) \qquad \varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots .$$

Ist also ρ irgendeine Wurzel der Gleichung $\rho^k = 1$, so ist $r' = \rho r$ eine Wurzel der Gleichung $\varphi(s) = 0$. Ferner ist

$$\varphi'(r') = \rho^{n-1}\varphi'(r),$$

und mithin ist r', ebenso wie r, eine einfache Wurzel. Daher stimmen die Größen (3.) mit den k verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\rho^k = 1$ überein, und ihre Anzahl ist gleich k.

XIV. *Die charakteristische Funktion einer unzerlegbaren Matrix A sei*

$$\varphi(s) = s^n + a's^{n'} + a''s^{n''} + \cdots,$$

wo $n > n' > n'' > \cdots$ ist, und $a', a'', \cdots$ von Null verschieden sind. Der größte gemeinsame Divisor der Differenzen $n-n'$, $n'-n''$, $\cdots$ sei k. Ist dann $k = 1$, so ist A primitiv. Ist aber $k > 1$, so ist A imprimitiv, A^k ist die niedrigste Potenz von A, die in lauter primitive Teile (vollständig) zerfällt, und die Anzahl dieser Teile ist ebenfalls gleich k. Setzt man

$$\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots + a_m s^{n-mk},\ \psi(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_m,$$

so hat die Gleichung $\psi(s) = 0$ eine positive Wurzel, die einfach ist und absolut größer als jede andere ihrer Wurzeln.

Der letzte Teil dieses Satzes zeigt am deutlichsten die geringe Modifikation, womit sich die Eigenschaften der positiven Matrizen auf imprimitive übertragen, während sie für primitive ganz unverändert gültig bleiben.

Die Zahl $n-n' = h$ ist die kleinste Zahl, wofür

die Hauptelemente von A^h

oder

die zyklischen Produkte $a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\delta}\cdots a_{\vartheta\alpha}$ von h Faktoren

oder

die Hauptunterdeterminanten $h$ten Grades von A

nicht sämtlich verschwinden.

Für irgendeine nicht negative Matrix ist jede dieser drei Bedingungen damit äquivalent, daß c_h der erste nicht verschwindende Koeffizient in $\varphi(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + c_2 s^{n-2} + \cdots$ ist.

Ist nun A unzerlegbar, so ist A primitiv oder imprimitiv, je nachdem A^h unzerlegbar oder zerlegbar ist.

Um diese Untersuchungen an einem Beispiel zu erläutern, sei $\varphi(s) = s^n - a$, wo a nicht Null ist. Dann ist $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $\cdots s_{n-1} = 0$, aber s_n von Null verschieden. Nun ist

$$s_1 = \sum a_{\alpha\alpha},\quad s_2 = \sum a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha},\quad s_3 = \sum a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\alpha}, \cdots.$$

Mithin ist jedes zyklische Produkt von weniger als n Faktoren

$$a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma\delta}\cdots a_{\vartheta\alpha} = 0,$$

aber nicht jedes von n Faktoren. Durch Umstellung der Reihen kann man bewirken, daß

$$(4.)\qquad a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}>0$$

ist. Da $a_{12}>0$ ist, so ist $a_{21}=0$, da $a_{34}a_{45}>0$ ist, so ist $a_{53}=0$, da $a_{n-2,n-1}a_{n-1,n}a_{n1}a_{12}>0$ ist, so ist $a_{2,n-2}=0$. So erkennt man, daß alle Elemente von A verschwinden, mit Ausnahme der n Elemente des Produkts (4.). Für $n=4$ ist also

$$(5.)\qquad A=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{23} & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{34}\\ a_{41} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ist A irgendeine nicht negative Matrix, und ist wie oben c_h der erste nicht verschwindende Koeffizient von $\varphi(s)$, so kann jede Hauptunterdeterminante $h$ten Grades von A, die von Null verschieden ist, durch Umstellung ihrer Reihen auf die Gestalt (5.) gebracht werden.

§ 9.

Jeder der k unzerlegbaren Teile $R_{\lambda\lambda}$ von A^k ist primitiv. Mithin ist $R_{\lambda\lambda}^l$ positiv, sobald l eine gewisse Grenze übersteigt. In einer Potenz von A^k, etwa in $A^{kp}=P$ sind folglich die Teile $R_{\lambda\lambda}^p=P_{\lambda\lambda}$ alle positiv.

Man teile die Matrix $A^m=M$ entsprechend in Submatrizen

$$M=\begin{pmatrix}M_{11} & M_{12}\cdots M_{1k}\\ M_{21} & M_{22}\cdots M_{2k}\\ . & .\ \cdots\ .\\ M_{k1} & M_{k2}\cdots M_{kk}\end{pmatrix}.$$

Ist m_λ der Grad von $R_{\lambda\lambda}$, so ist z. B. M_{12} die Matrix der Elemente aus den Zeilen $1, 2, \cdots m_1$ und den Spalten $m_1+1, \cdots m_1+m_2$ von M. Ist nun m nicht durch k teilbar, so ist es auch $m+kp$ nicht. Folglich verschwinden alle Hauptelemente der Matrix MP, also auch von $M_{\alpha\alpha}P_{\alpha\alpha}$. Ist $M_{\alpha\alpha}=U$, $P_{\alpha\alpha}=V$, so ist $\sum\limits_\lambda u_{\varkappa\lambda}v_{\lambda\varkappa}=0$, $u_{\varkappa\lambda}v_{\lambda\varkappa}=0$, und weil $v_{\lambda\varkappa}>0$ ist, $u_{\varkappa\lambda}=0$, d. h. $M_{\alpha\alpha}=0$.

Ist daher

$$A=\begin{pmatrix}L_{11} & L_{12}\cdots L_{1k}\\ L_{21} & L_{22}\cdots L_{2k}\\ . & .\ \cdots\ .\\ L_{k1} & L_{k2}\cdots L_{kk}\end{pmatrix},$$

so ist zunächst $L_{\alpha\alpha}=0$.

Ist $k > 2$, so sind in der Matrix $M = APA$ die Submatrizen

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\alpha} = 0,$$

mithin ist $L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\alpha} = 0$, oder wenn man $L_{\alpha\beta} = U$, $P_{\beta\beta} = V$, $L_{\beta\alpha} = W$ setzt, $UVW = 0$,

$$\sum_{\varrho,\sigma} u_{\varkappa\varrho} v_{\varrho\sigma} w_{\sigma\lambda} = 0, \quad u_{\varkappa\varrho} v_{\varrho\sigma} w_{\sigma\lambda} = 0, \quad u_{\varkappa\varrho} w_{\sigma\lambda} = 0,$$

also entweder $U = 0$ oder $W = 0$. Daher ist entweder $L_{\alpha\beta}$ oder $L_{\beta\alpha} = 0$.

Ist $k > 3$, so sind in der Matrix $M = APAPA$ die Submatrizen

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta,\gamma} L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\gamma} P_{\gamma\gamma} L_{\gamma\alpha} = 0,$$

also $(L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\gamma}) P_{\gamma\gamma} L_{\gamma\alpha} = 0$, demnach entweder $L_{\gamma\alpha} = 0$ oder $L_{\alpha\beta} P_{\beta\beta} L_{\beta\gamma} = 0$, mithin entweder $L_{\beta\gamma} = 0$ oder $L_{\alpha\beta} = 0$.

Sind allgemein $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots \vartheta$ $m < k$ verschiedene Indizes, so verschwindet eine der Submatrizen

$$L_{\alpha\beta}, L_{\beta\gamma}, L_{\gamma\delta}, \cdots L_{\vartheta\alpha}.$$

Dies gilt aber nicht für jeden Zyklus von k Matrizen. Sonst ist $A^k = 0$, $\varphi(s) = s^n$, $r = 0$, und A zerfällt in n Teile. Denn jede der hier betrachteten Submatrizen von A^k ist eine Summe von Produkten von k Faktoren

$$L_{\alpha\beta} L_{\beta\gamma} L_{\gamma\delta} \cdots L_{\varkappa\lambda} L_{\lambda\mu} L_{\mu\nu}.$$

Da jeder Index einen der Werte $1, 2, \cdots k$ hat, so müssen von den den $k+1$ Indizes $\alpha, \beta, \cdots \mu, \nu$ mindestens zwei einander gleich sein. Ist z. B. $\beta = \mu$, so verschwindet eine der Matrizen des Zyklus

$$L_{\beta\gamma}, L_{\gamma\delta}, \cdots L_{\varkappa\lambda}, L_{\lambda\beta} (= L_{\lambda\mu}),$$

und folglich auch das Produkt.

Durch Umstellung der Reihen kann man bewirken, daß keine der Matrizen

$$L_{12}, L_{23}, L_{34}, \cdots L_{k-1,k}, L_{k,1}$$

verschwindet. Dann erkennt man wie am Schluß des § 8, daß alle andern Submatrizen $L_{\alpha\beta} = 0$ sind. Demnach ist z. B. für $k = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{34} \\ L_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und daraus folgt

$$(1.) \qquad R_{\lambda\lambda} = L_{\lambda,\lambda+1} L_{\lambda+1,\lambda+2} \cdots L_{k-1,k} L_{k,1} L_{12} \cdots L_{\lambda-1,\lambda}.$$

§ 10.

Sind P und Q zwei Matrizen $n$ten Grades, und ist $|P|$ nicht Null, so ist

$$P^{-1}(PQ)P = QP$$

und mithin

$$(1.)\qquad |sE-PQ| = |sE-QP|.$$

Sind die Elemente von P unabhängige Variable, so gilt diese Gleichung für alle Werte der Veränderlichen, für die $|P|$ von Null verschieden ist, und daher gilt sie identisch. (Die beiden Determinanten (1.) brauchen aber nicht in den Elementarteilern übereinzustimmen.)

Ist P eine Matrix von m Zeilen und n Spalten, Q eine Matrix von n Zeilen und m Spalten, so hat PQ den Grad m, QP den Grad n. Seien $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ ihre charakteristischen Funktionen. Ist etwa $m < n$, so füge man zu den m Zeilen von P noch $n-m$ Zeilen von je n verschwindenden Elementen und zu den m Spalten von Q noch $n-m$ solche Spalten. Gehen so P und Q in P_0 und Q_0 über, so ist $Q_0P_0 = QP$, während P_0Q_0 aus PQ durch Hinzufügung von $n-m$ Zeilen und Spalten verschwindender Elemente entsteht. Daher ist

$$\psi(s) = |sE-QP| = |sE-Q_0P_0| = |sE-P_0Q_0| = s^{n-m}\varphi(s).$$

Setzt man

$$L_{\varkappa,\varkappa+1}\,L_{\varkappa+1,\varkappa+2}\cdots L_{\lambda-1,\lambda} = P,\quad L_{\lambda,\lambda+1}\,L_{\lambda+1,\lambda+2}\cdots L_{\varkappa-1,\varkappa} = Q,$$

so ist

$$R_{\varkappa\varkappa} = PQ,\quad R_{\lambda\lambda} = QP.$$

Ist $\varphi_\lambda(s)$ die charakteristische Funktion von $R_{\lambda\lambda}$, und ist $m_\varkappa$ die kleinste der Zahlen $m_1, m_2, \cdots m_\varkappa$, so ist

$$\varphi_\lambda(s) = s^{m_\lambda - m_\varkappa}\varphi_\varkappa(s),$$

oder wenn man $m_\varkappa = m$ und $\varphi_\varkappa(s) = \psi(s)$ setzt,

$$\varphi_\lambda(s) = s^{m_\lambda - m}\,\psi(s),\ (s-r^k)(s-r_1^k)\cdots(s-r_{n-1}^k) = \prod \varphi_\lambda(s) = s^{n-mk}\,\psi(s)^k.$$

Von den n Wurzeln $r, r_1, \cdots r_{n-1}$ der Gleichung $\varphi(s) = 0$ verschwinden also mindestens $n-mk$. Ist

$$\varphi(s) = s^n + a_1 s^{n-k} + a_2 s^{n-2k} + \cdots + a_m s^{n-mk} = s^{n-mk}(s^k - r^k)(s^k - r_1^k)\cdots(s^k - r_{m-1}^k),$$

so ist die Funktion, deren Wurzeln die $k$ten Potenzen der Wurzeln von $\varphi(s)$ sind,

$$s^{n-mk}(s-r^k)^k(s-r_1^k)^k\cdots(s-r_{m-1}^k)^k.$$

Folglich ist

$$\psi(s) = (s-r^k)(s-r_1^k)\cdots(s-r_{m-1}^k)$$

oder

$$(2.)\qquad \psi(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \cdots + a_m,$$

und allgemein ist

$$(3.)\qquad \varphi_\lambda(s) = s^{m\lambda} + a_1 s^{m\lambda-1} + a_2 s^{m\lambda-2} + \cdots + a_m s^{m\lambda-m}.$$

§ 11.

Aus den Eigenschaften der unzerlegbaren Matrizen lassen sich analoge Eigenschaften der zerlegbaren herleiten. So gilt der Satz:

XV. *Ist r die Maximalwurzel einer nicht negativen Matrix, so sind die Wurzeln von A, die absolut gleich r sind, die sämtlichen Wurzeln einer Gleichung der Form*

$$(s^k - r^k)(s^l - r^l)(s^m - r^m)\cdots = 0.$$

Genügt also der charakteristischen Gleichung $\varphi(s) = 0$ eine Größe ρr, die der Maximalwurzel, r absolut gleich ist, so ist ρ eine Einheitswurzel; der Gleichung $\varphi(s) = 0$ genügt dann auch das Produkt aus r und jeder Potenz von ρ.

Anknüpfend an den Anfang des § 7 will ich jetzt auch für eine zerlegbare Matrix A untersuchen, unter welchen Bedingungen die n linearen Gleichungen $AX = sX$ eine Lösung haben, worin $x_1, \cdots x_n$ alle $\geqq 0$, aber nicht alle $= 0$ sind. Ich schreibe diese Gleichungen in der Form

$$(1.)\qquad \begin{array}{ll} L_{11}X_1 & = sX_1, \\ L_{21}X_1 + L_{22}X_2 & = sX_2, \\ L_{31}X_1 + L_{32}X_2 + L_{33}X_3 & = sX_3, \\ \cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot & \cdot \\ L_{m1}X_1 + L_{m2}X_2 + L_{m3}X_3 + \cdots + L_{mm}X_m & = sX_m. \end{array}$$

Sei $r_\varkappa$ die Maximalwurzel der unzerlegbaren Matrix $L_{\varkappa\varkappa}$. Ist dann s keiner der Größen $r_1, r_2, \cdots r_m$ gleich, so ist nach der ersten Gleichung $X_1 = 0$, dann nach der zweiten $X_2 = 0$, usw.

Ferner ist bei einer nicht negativen Lösung X immer entweder $X_\varkappa = 0$ oder $X_\varkappa > 0$, d. h. von den Unbekannten, die das Teilsystem $X_\varkappa$ bilden, können nicht einige $= 0$, andere > 0 sein. Denn ist $s > r_\varkappa$, so ist

$$(sE_\varkappa - L_{\varkappa\varkappa})^{-1} = P$$

eine positive Matrix und

$$(2.)\qquad X_\varkappa = (sE_\varkappa - L_{\varkappa\varkappa})^{-1}(L_{\varkappa 1}X_1 + \cdots + L_{\varkappa,\varkappa-1}X_{\varkappa-1}) = PZ,$$

wo $Z \geqq 0$ ist. $X_\varkappa$ besteht also aus den Größen $\sum_\beta p_{\alpha\beta} z_\beta$. Da stets $p_{\alpha\beta} > 0$ ist, so ist $X_\varkappa > 0$, außer wenn $Z = 0$ ist. Dann ist $X_\varkappa = 0$.

Ist aber $s \leqq r_\varkappa$, so sei $Y_\varkappa$ eine positive Lösung der Gleichung

$$Y_\varkappa L_{\varkappa\varkappa} = r_\varkappa Y_\varkappa.$$

Dann ist

$$(3.)\qquad Y_\varkappa\big(L_{\varkappa 1}X_1+\cdots+L_{\varkappa,\varkappa-1}X_{\varkappa-1}+(r_\varkappa-s)X_\varkappa\big)=0,$$

also da $Y_\varkappa > 0$ ist und jeder Summand $\geqq 0$ ist,

$$(4.)\qquad L_{\varkappa 1}X_1=0,\cdots L_{\varkappa,\varkappa-1}X_{\varkappa-1}=0,\quad (r_\varkappa-s)X_\varkappa=0,$$

mithin

$$(5.)\qquad X_\varkappa = 0,\ \text{wenn}\ s<r_\varkappa$$

ist. Ist aber $s=r_\varkappa$, so folgt aus (4.) und der $\varkappa$ten Gleichung (1.) $L_{\varkappa\varkappa}X_\varkappa = r_\varkappa X_\varkappa$, und daher ist entweder $X_\varkappa = 0$ oder $X_\varkappa > 0$.

Sollen nun die Gleichungen (1.) eine nicht negative Lösung haben, so muß eine der Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_m$ gleich s sein. Sind es mehrere, so bezeichne ich im folgenden stets mit r_λ die, deren Index λ am größten ist. Wenn dann

$$(6.)\qquad r_\lambda > r_{\lambda+1},\quad r_\lambda > r_{\lambda+2},\quad \cdots r_\lambda > r_m$$

ist, so haben die Gleichungen (1.) eine nicht negative Lösung. (Ist $\lambda = m$, so fallen die Bedingungen (6.) weg.) Denn man setze $X_1 = 0$, $\cdots X_{\lambda-1} = 0$ und wähle für X_λ die positive Lösung der Gleichung $L_{\lambda\lambda}X_\lambda = r_\lambda X_\lambda$. Dann ergibt sich aus der $(\lambda+1)$ten Gleichung (1.), weil $s > r_{\lambda+1}$ ist, nach (2.) eine ganz bestimmte Matrix $X_{\lambda+1}$, die >0 oder $=0$ ist, aus der $(\lambda+2)$ten $X_{\lambda+2}$ usw.

Es ist möglich, daß die Gleichungen (1.) auch bei anderer Anordnung der Gleichungen und der Unbekannten $X_1, X_2, \cdots X_m$ dieselbe Gestalt haben, falls nämlich einige der Matrizen $L_{\alpha\beta}$ $(\alpha > \beta)$ Null sind. Dann genügt es, wenn die Bedingungen (6.) für irgendeine der möglichen Anordnungen erfüllt sind.

Wenn sie aber für keine erfüllt sind, so haben die Gleichungen $AX = sX$, wie ich jetzt zeigen will, keine Lösung der betrachteten Art. Denn von den Matrizen $X_1, X_2, \cdots X_m$ muß mindestens eine verschwinden. Sonst folgt aus der ersten Gleichung (1.) $s = r_1$ und aus (5.) $s \geqq r_2, \cdots s \geqq r_m$, und demnach sind die Bedingungen (6.) (spätestens für $\lambda = m$) erfüllt.

Ist nun zunächst $X_1 = 0$, so lauten die Gleichungen (1.)

$$(7.)\qquad \begin{aligned} &L_{22}X_2 &&= sX_2,\\ &L_{32}X_2 + L_{33}X_3 &&= sX_3,\\ &\cdot \qquad \cdot \quad \cdots &&\quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Ist $\lambda = 1$, so ist keine der Größen $r_2, r_3, \cdots r_m$ gleich s, und folglich ist $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $\cdots X_m = 0$. Ist aber $\lambda > 1$, so sind bei keiner der möglichen Anordnungen der Gleichungen (7.) die Bedingungen (6.) erfüllt. Da ihre Matrix nur aus $m-1$ Teilen besteht, so können wir für diese Gleichungen die behauptete Umkehrung schon als bewiesen voraussetzen, und schließen, daß $X_2 = X_3 = \cdots = X_m = 0$ sein muß.

Wäre aber $X_1 > 0, \cdots X_{\varkappa-1} > 0$ und zuerst $X_\varkappa = 0$, so wäre

$$L_{\varkappa 1} X_1 + L_{\varkappa 2} X_2 + \cdots + L_{\varkappa,\varkappa-1} X_{\varkappa-1} = 0,$$

also, da kein Summand negativ, ist

$$L_{\varkappa 1} X_1 = 0, \quad L_{\varkappa 2} X_2 = 0, \cdots \quad L_{\varkappa,\varkappa-1} X_{\varkappa-1} = 0,$$

und mithin

$$L_{\varkappa 1} = 0, \quad L_{\varkappa 2} = 0, \cdots \quad L_{\varkappa,\varkappa-1} = 0.$$

Folglich kann man durch zyklische Vertauschung der ersten $\varkappa$ Gleichungen und Unbekannten die $\varkappa$te Gleichung

$$L_{\varkappa\varkappa} X_\varkappa = s X_\varkappa$$

an die erste Stelle bringen, ohne daß die Gleichungen ihre Form ändern. Bei dieser Anordnung ist dann $X_\varkappa$ das erste Teilsystem von X, und $X_\varkappa = 0$, und folglich verschwinden auch, wie oben gezeigt, alle andern Teilsysteme.

Ist s die größte der Wurzeln $r_1, r_2, \cdots r_m$, so sind die Bedingungen (6.) immer erfüllt. Daß dann die Gleichungen (1.) eine nicht negative Lösung haben, ist schon im § 1 gezeigt worden.

§ 12.

Daß eine Zerlegung einer Matrix A in unzerlegbare Teile nur in einer Weise möglich ist, kann man auf folgende Art einsehen. Jeder Teil von A ist durch die Hauptelemente (nicht ihre Werte, sondern ihre Indizes), die er enthält, vollständig bestimmt. Seien in zwei Zerlegungen Q und R zwei unzerlegbare Teile von A, die ein Hauptelement gemeinsam haben. Es möge B ein unmittelbarer Teil von A heißen, wenn alle Elemente von A verschwinden, welche die Zeilen (oder Spalten) von B um die komplementären Spalten (oder Zeilen) enthalten. (Ein solcher ist z. B. in der Matrix (1.) § 2 P und Q, aber nicht R.) Der zu B komplementäre Teil ist dann auch ein unmittelbarer.

Sei B ein solcher Teil, der Q enthält, C einer, der R enthält, dann können wir annehmen, daß die Zeilen (und Spalten) von B und C zusammen alle n Zeilen sind. Denn sonst sind B und C als unmittelbare Teile in einer Matrix enthalten, deren Grad kleiner als n ist, und für die wir es schon als erwiesen ansehen können, daß die unzerlegbaren Teile Q und R gleich sind, wenn sie ein Diagonalelement gemeinsam haben.

Es sind nun zwei (eigentlich vier) Fälle zu unterscheiden:

Erstens

$$A = \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}, \quad C = \begin{matrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{matrix}.$$

A_1 enthält alle Hauptelemente, die B und C gemeinsam haben. B ist ein unmittelbarer Teil von A, weil die Elemente von A_3 und B_3 verschwinden, welche die Spalten von B mit den komplementären Zeilen gemeinsam haben, C ist es, weil die Elemente von A_2 und C_2 verschwinden, welche die Spalten von C mit den komplementären Zeilen gemeinsam haben. Weil $A_2 = 0$ ist, ist A_1 ein Teil von B; weil $A_3 = 0$ ist, ist A_1 ein Teil von C. Für die Matrizen B und C ist die Behauptung schon erwiesen. Q und R haben ein Hauptelement gemeinsam, also auch B und C. Dies kommt demnach in A_1 vor. Folglich ist Q ein Teil von A_1, ebenso R, und mithin ist $Q = R$.

Zweitens

$$A = \begin{matrix} A_1 & 0 & C_1 \\ A_2 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} A_1 & 0 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}, \quad C = \begin{matrix} A_1 & C_1 \\ 0 & C_3 \end{matrix}.$$

Hier verschwinden die Elemente von A_3 und B_3, welche die Spalten von B mit den komplementären Zeilen gemeinsam haben und die Elemente von B_1 und B_3, welche die Zeilen von C mit den komplementären Spalten gemeinsam haben. Der Beweis ist derselbe.

Ein anderer Beweis desselben Satzes ist mehr algebraischer Natur. Die Zerlegbarkeit einer Matrix beruht darauf, daß gewisse Elemente außerhalb der Diagonale verschwinden, bleibt also ungeändert, wenn die nicht verschwindenden Elemente und alle Hauptelemente durch unabhängige Variable $x_{\alpha\beta}$ ersetzt werden. Dadurch gehe die Determinante $|A|$ in X über, eine ganze Funktion der unabhängigen Variabeln, die nicht verschwindet, weil sie das Glied $x_{11}x_{22}\cdots x_{nn}$ enthält. Läßt sich $X = PQ$ in zwei Faktoren zerlegen, die ganze Funktionen des Variabeln sind, so nenne ich X *reduzibel.*

XII. *Ist die nicht negative Matrix A unzerlegbar, so ist die ganze Funktion X irreduzibel.*

In $X = PQ$ kommt die Variable $x_{\alpha\alpha}$ wirklich vor, und X ist eine lineare Funktion von $x_{\alpha\alpha}$. Daher kann $x_{\alpha\alpha}$ nur in einem der beiden Faktoren P oder Q vorkommen. Es mögen $x_{11}, \cdots x_{mm}$ in P, $x_{m+1,m+1} \cdots x_{nn}$ in Q vorkommen. In bezug auf diejenigen der Größen $x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \cdots x_{\alpha n}$, die nicht Null sind, ist X eine homogene lineare Funktion. Daher kommen sie alle in demselben Faktor vor, der durch $x_{\alpha\alpha}$ bestimmt ist, in P, wenn $\alpha \leqq m$, in Q, wenn $\alpha > m$ ist. Dasselbe gilt von $x_{1\beta}, x_{2\beta}, \cdots x_{n\beta}$. Ich nenne die Indizes α, β ungleichartig, wenn einer $\leqq m$, der andere $> m$ ist, aber gleichartig, wenn beide $\leqq m$ oder beide $> m$ sind. Sind α und β ungleichartig, so kommt demnach $x_{\alpha\beta}$ weder in P noch in Q vor, also auch nicht in $X = PQ$. Daraus folgt beiläufig, daß $0 < m < n$ ist.

Daher ist $x_{\alpha\beta} x_{\beta\alpha} = 0$. Denn sind $\rho, \sigma, \tau, \cdots$ die $n-2$ übrigen Indizes, so würde, wenn $x_{\alpha\beta}$ und $x_{\beta\alpha}$ beide nicht Null sind, in X das Glied $x_{\alpha\beta} x_{\beta\alpha} x_{\varrho\varrho} x_{\sigma\sigma} x_{\tau\tau} \cdots$ vorkommen. Allgemeiner ist, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \vartheta$ nicht alle gleichartig sind, das zyklische Produkt $x_{\alpha\beta} x_{\beta\gamma} x_{\gamma\delta} \cdots x_{\vartheta\alpha} = 0$.

Ein solches Produkt bleibt bei zyklischer Vertauschung der Indizes ungeändert. Unter der gemachten Voraussetzung müssen von den Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \vartheta$ zwei aufeinanderfolgende ungleichartig sein. Sind die Indizes nicht alle verschieden, und ist $\alpha = \beta$, so ist das Produkt gleich $x_{\alpha\alpha}(x_{\beta\gamma} x_{\gamma\delta} \cdots x_{\vartheta\beta})$, ist $\alpha = \gamma$, gleich $(x_{\alpha\beta} x_{\beta\alpha})(x_{\gamma\delta} \cdots x_{\vartheta\gamma})$. In diesem Falle wäre nur die analoge Behauptung für ein zyklisches Produkt von weniger Faktoren zu beweisen, deren Indizes alle verschieden und nicht alle gleichartig sind. Wir können daher annehmen, daß alle Indizes verschieden sind, und daß α und β ungleichartig sind.

Seien dann $\alpha, \beta, \cdots \vartheta, \rho, \sigma, \tau, \cdots$ die n verschiedenen Indizes. Wären $x_{\alpha\beta}, x_{\beta\gamma}, \cdots x_{\vartheta\alpha}$ alle von Null verschieden, so würde X das Glied $x_{\alpha\beta} x_{\beta\gamma} \cdots x_{\vartheta\alpha} x_{\varrho\varrho} x_{\sigma\sigma} x_{\tau\tau} \cdots$ enthalten, also die Variable $x_{\alpha\beta}$, deren Indizes ungleichartig sind.

Sind α und β ungleichartig, so ist $x_{\alpha\beta} x_{\beta\varkappa} x_{\varkappa\alpha} = 0$, also auch $x_{\alpha\beta} \sum\limits_{\varkappa} x_{\beta\varkappa} x_{\varkappa\alpha} = 0$ oder $x_{\alpha\beta} x^{(2)}_{\beta\alpha} = 0$, allgemeiner $x_{\alpha\varkappa} x_{\varkappa\beta} x_{\beta\lambda} x_{\lambda\mu} x_{\mu\alpha} = 0$, also auch $\left(\sum\limits_{\varkappa} x_{\alpha\varkappa} x_{\varkappa\beta}\right)\left(\sum\limits_{\lambda,\mu} x_{\beta\lambda} x_{\lambda\mu} x_{\mu\alpha}\right) = 0$, oder $x^{(2)}_{\alpha\beta} x^{(3)}_{\beta\alpha} = 0$, überhaupt

$$x^{(k)}_{\alpha\beta} x^{(l)}_{\beta\alpha} = 0,$$

daher sind entweder die Größen

$$x_{\alpha\beta}, \quad x^{(2)}_{\alpha\beta}, \quad x^{(3)}_{\alpha\beta}, \quad \cdots \quad x^{(n-1)}_{\alpha\beta}$$

sämtlich Null oder die Größen

$$x_{\beta\alpha}, \quad x^{(2)}_{\beta\alpha}, \quad x^{(3)}_{\beta\alpha}, \quad \cdots \quad x^{(n-1)}_{\beta\alpha}.$$

Legt man den Variabeln positive Werte bei, so folgt daraus nach Satz IV, daß A, also auch X zerlegbar ist.

Wenn nun A in die unzerlegbaren Matrizen $A_1, A_2, A_3, \cdots$ zerfällt, so zerfällt X entsprechend in die Determinanten $X_1, X_2, X_3, \cdots$, und diese sind irreduzibel, und jede von ihnen kann durch die in ihr vorkommenden Hauptelemente charakterisiert werden. Da diese irreduzibeln Faktoren durch X vollständig bestimmt sind, so kann auch die Matrix A nur auf eine Art in unzerlegbare Teile zerfällt werden.

In einer Determinante kann man durch beliebige (auch nicht kogrediente) Umstellung der Zeilen und Spalten die Elemente jedes Gliedes in die Diagonale bringen. Folglich ergibt sich aus den obigen Erörterungen der Satz I.